# فصل ۱

# جبر خطی

هدف از این فصل تهیه مقدمات لازم برای درک فصول بعدی خصوصاً فصل دوم، یعنی هندسهٔ تحلیلی است. فصل حاضر به همراه فصل بعدی زمینه لازم برای درک سایر فصول این کتاب را فراهم سازند. به نظر می‌رسد که قسمت عمده‌ای از مطالب این فصل را خواننده در دوره قبل از دانشگاه مطالعهٔ نموده است. بنابراین، چنانچه خواننده محترم با مفاد این فصل آشنایی کافی دارد، می‌تواند از مطالعهٔ آن صرف نظر کرده و به ادامهٔ کتاب بپردازد.

## ۱.۱ خط، صفحه و فضای اقلیدسی

اشیاء مورد مطالعه در ادامهٔ این کتاب به سه مجموعهٔ زمینه‌ای خاص به نامهای خط، صفحه و فضای اقلیدسی (یا دکارتی) متعلقند. این سه را به ترتیب با نماد $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^{2}$ و $\mathbb{R}^{3}$ نشان می‌دهیم. ذیلاً به تعریف دقیق هر یک از آنها می‌پردازیم.

**۱.۱.۱ تعریف.** عدد حقیقی نمادی به شکل $x=\pm\overline{x_0/x_1x_2\cdots x_n\cdots}$ است که در آن $x_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ و $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\in\{0,1,2,\cdots,9\}$. در واقع، به زبان دنباله‌ها، داریم

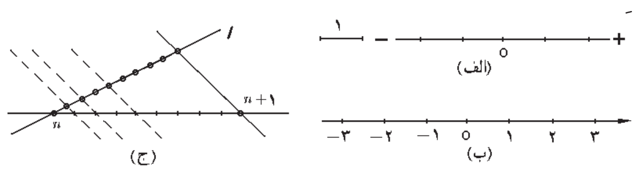
$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty}\pm\overline{x_0/x_1x_2\cdots x_n} \\ &= \pm\lim_{n\to\infty}\left\{x_0+\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\cdots+\frac{x_n}{10^n}\right\} \end{aligned}$$

مجموعه همهٔ اعداد حقیقی را با نماد $\mathbb{R}$ نشان داده و به آن **خط حقیقی** می‌گوئیم.

**۲.۱.۱ نمایش خط اقلیدسی.** برای نمایش خط اقلیدسی از محور حقیقی استفاده می‌کنیم. این محور به صورت زیر ساخته می‌شود:

ابتدا خط راستی را در صفحه مشخص نموده و نقطه‌ای را بعنوان مبداء $O$ بر آن تعیین می‌کنیم. سپس پاره‌خطی را بعنوان واحد ۱ فرض می‌کنیم. خط مفروض توسط $O$ به دو قطعه تقسیم می‌شود. یکی از آن دو را **مثبت** و دیگری را **منفی** می‌نامیم. اکنون به کمک واحد به تقسیم خط می‌پردازیم (شکل ۱.۱—الف). تقسیمات بدست آمده در نیمهٔ مثبت را به ترتیب از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم و تقسیمات بدست آمده در نیمهٔ منفی را به ترتیب از راست به چپ شماره‌گذاری می‌کنیم و سپس به هر یک علامت منفی می‌افزائیم (شکل ۱.۱—ب).

اکنون برای تقسیم کردن هر یک از قسمتهای بدست آمده، از خاصیت مثلثهای متشابه استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که از $\ell$ خطی غیر موازی با محور حقیقی خارج نموده و با ابتدای از $n$، ده واحد بر آن مشخص می‌کنیم. اکنون از نقطهٔ انتهایی تکهٔ دهم خطی را به نقطهٔ $n+1$ متصل نموده و از سایر نقاط تقسیم نیز به موازات این خط، خطوطی را می‌گذرانیم. به این ترتیب از محل برخورد نه خط جدید با بازهٔ $[n;n+1]$، این بازه به ده قسمت مساوی تقسیم می‌گردد (شکل ۱.۱—ج).




شکل ۱.۱: نمایش اعداد بر محور حقیقی

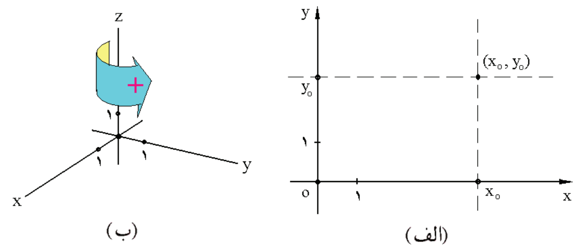
این روند را می‌توان ادامه داد و هر یک از تقسیمات بدست آمده را مجدداً به ده قسمت مساوی تقسیم نمود و ... برای نشان دادن $x=\overline{x_0/x_1x_2\cdots x_n\cdots}$ بر خط حقیقی به شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا عدد $x_0$ را بر محور انتخاب می‌کنیم ($x_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$). سپس قطعهٔ شمارهٔ $x_1$ از بازهٔ $[x_0;x_0+1]$ را انتخاب نموده و سپس قطعهٔ شمارهٔ $x_2$ از بازهٔ $[\overline{x_0/x_1};\overline{x_0/x_1}+1/10]$ را انتخاب می‌کنیم و ... عدد $-x$ قرینهٔ $x$ نسبت به ۰ می‌باشد.

**۳.۱.۱ قرارداد.** تناظری یکبیک بین مجموعهٔ $\mathbb{R}$ و خط حقیقی وجود دارد. این جمله در واقع یک اصل از مجموعهٔ اصول موضعهٔ هندسهٔ مسطحه است که بر مبنی آن، هر خط یک خطکش می‌پذیرد. به همین دلیل از این پس بین این دو مفهوم فرقی قایل نیستیم.

**۴.۱.۱ تعریف.** مجموعه همهٔ زوجهای مرتب از اعداد حقیقی را **صفحهٔ اقلیدسی** (یا **دکارتی**) نامیده و با نماد $\mathbb{R}^2$ نشان می‌دهیم $\mathbb{R}^2 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$. به این ترتیب، **نقطه در صفحه** یعنی یک زوج مرتب از اعداد حقیقی.

**۵.۱.۱ نمایش صفحهٔ اقلیدسی.** دو محور حقیقی همانند انتخاب می‌کنیم. این دو را طوری بر هم عمود می‌کنیم که مبداء هر دو بر هم منطبق شوند و با دورانی به اندازهٔ $\pi/2$ بتوان نیمهٔ مثبت محور افقی را بر نیمهٔ مثبت محور عمودی منطبق نمود. اکنون محور افقی را $x$–محور و محور عمودی را $y$–محور می‌نامیم. برای نشان دادن نقطهٔ $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ در صفحه حقیقی، از عدد $x_0$ واقع بر $x$–محور خطی را به موازات $y$–محور رسم نموده و سپس از عدد $y_0$ واقع بر $y$–محور نیز خطی را به موازات $x$–محور رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط، نمایشگر نقطهٔ $(x_0,y_0)$ است (نیز شکل ۲.۱—الف توجه شود).




شکل ۲.۱: الف) نمایش نقاط در صفحه
ب) کنج راستگرد

**۶.۱.۱ قضیه.** تناظری یکبیک بین نقاط صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ و صفحهٔ حقیقی وجود دارد. این قضیه نتیجه‌ای از قرارداد (۳.۱.۱) است. به همین دلیل، از این پس این دو را عملاً یکی می‌گیریم.

**۷.۱.۱ تعریف.** منظور از **شکل** در صفحه، مجموعه‌ای از نقاط در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد.

**۸.۱.۱ مثال.** ذیلاً چند نمونه از شکلهای معروف در صفحه را معرفی می‌کنیم:

مبداء .......................... $O = (0,0)$

$x$–محور یا محور $x$ ها ................ $y = 0$

$y$–محور $y$ ها ........................ $x = 0$

ربع اول ...................... $x \geq 0 \,,\, y \geq 0$

ربع دوم ...................... $x \leq 0 \,,\, y \geq 0$

ربع سوم .................... $x \leq 0 \,,\, y \leq 0$

ربع چهارم ................... $x \geq 0 \,,\, y \leq 0$

نیمساز ربع اول و سوم .................. $y = x$

نیمساز ربع دوم و چهارم .............. $y = -x$

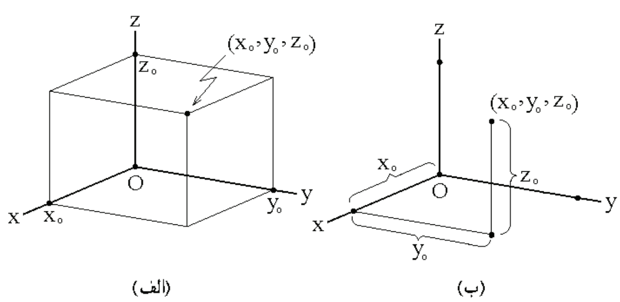
دایرهٔ واحد ................ $S^1 : x^2 + y^2 = 1$

**۹.۱.۱ تعریف.** مجموعهٔ همهٔ سه‌تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را **فضای اقلیدسی** (یا **دکارتی**) نامیده و با نماد $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

به این ترتیب **نقطه در فضا** یعنی یک سه‌تایی مرتب از اعداد حقیقی.

**۱۰.۱.۱ نمایش فضای اقلیدسی.** برای نشان دادن نقاط فضای اقلیدسی از فضای واقعی اطراف ما استفاده می‌شود. برای این منظور، سه محور همانند انتخاب نموده و آنها را در مبداء بر هم عمود می‌کنیم، به گونه‌ای که کنج حاصله راستگرد باشد. به این معنی که اگر آنها را به ترتیب $x$–محور، $y$–محور و $z$–محور بنامیم، آنگاه اگر $x$–محور را به سمت $y$–محور باندازهٔ $\pi/2$ در جهت مثبت دوران دهیم و این حرکت را با انگشتان دست راست نشان دهیم، شست دست راست در امتداد $z$–محور قرار بگیرد (شکل ۲.۱—ب).



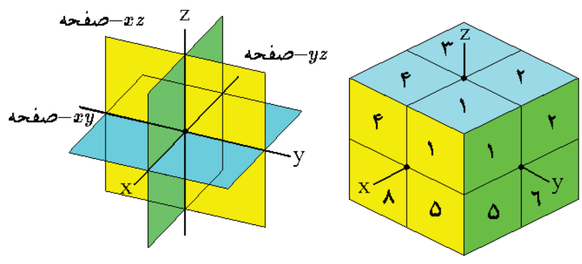

شکل ۳.۱: نمایش نقاط در فضا

اکنون برای نمایش نقطهٔ $(x_0,y_0,z_0)$، بر چهار نقطهٔ $O$، $x_0$ (بر $x$–محور)، $y_0$ (بر $y$–محور) و $z_0$ (بر $z$–محور) مکعب مستطیلی را رسم می‌کنیم. این کار با گذراندن صفحه‌ای عمود بر $x$–محور در نقطهٔ $x_0$، صفحه‌ای عمود بر $y$–محور در نقطهٔ $y_0$ و صفحه‌ای عمود بر $z$–محور در نقطهٔ $z_0$ انجام می‌پذیرد (شکل ۳.۱—الف). به این ترتیب، رأس مقابل به مبداء به نقطهٔ $(x_0,y_0,z_0)$ متناظر است.

این کار را با ترسیم تنها سه پاره‌خط نیز می‌توان انجام داد. به این ترتیب که ابتدا بر $x$ـمحور عدد $x_0$ را مشخص می‌کنیم، سپس از $x_0$ به اندازهٔ $y_0$ و به موازات $y$ـمحور پاره‌خطی را ترسیم می‌کنیم و آنگاه به موازات $z$ـمحور و به طول $z_0$ یک پاره‌خط رسم می‌کنیم. نقطهٔ انتهایی آخرین پاره‌خط، به $(x_0, y_0, z_0)$ متناظر است (شکل ۳.۱ـب).

**۱۱.۱.۱ قضیه.** تناظری یکبیک بین نقاط فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ و نقاط فضای حقیقی وجود دارد. این قضیه، نتیجه‌ای از قرارداد ۳.۱.۱ است. به همین دلیل، از این پس بین این دو فرقی قایل نیستیم.

**۱۲.۱.۱ تعریف.** منظور از یک شکل در فضا، مجموعه‌ای از نقاط $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.




(ب) (الف)

شکل ۴.۱: الف) تقسیم فضا به هشت قسمت
ب) صفحات مختصاتی

**۱۳.۱.۱ مثال.** شکلهای زیر از فضا معروفند و می‌بایستی دانسته شوند:

مبداء مختصات ............... $O = (0, 0, 0)$
$x$ـمحور یا محور $x$ ها ......... $y = 0\ ,\ z = 0$
$y$ـمحور یا محور $y$ ها ......... $x = 0\ ,\ z = 0$
$z$ـمحور یا محور $z$ ها ......... $x = 0\ ,\ y = 0$
$xy$ـصفحه یا صفحهٔ $xOy$ ............. $z = 0$
$xz$ـصفحه یا صفحهٔ $xOz$ ............. $y = 0$
$yz$ـصفحه یا صفحهٔ $yOz$ ............. $x = 0$
یک هشتم اول ........ $x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم دوم ........ $x \leq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم سوم ........ $x \leq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم چهارم ...... $x \geq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \geq 0$
یک هشتم پنجم ....... $x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \leq 0$
یک هشتم ششم ....... $x \leq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \leq 0$
یک هشتم هفتم ....... $x \leq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \leq 0$
یک هشتم هشتم ....... $x \geq 0\ ,\ y \leq 0\ ,\ z \leq 0$
کرهٔ واحد ............ $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

برخی از این پانزده مجموعه را در شکل ۴.۱ نمایش داده‌ایم.

### ۱۴.۱.۱ ارتباط خط، صفحه و فضای اقلیدسی.

خط اقلیدسی را با فرض $x = (x, 0)$ در صفحهٔ اقلیدسی می‌توان نشاند. با فرض $(x, y) = (x, y, 0)$ نیز می‌توان صفحهٔ اقلیدسی را در فضای اقلیدسی نشاند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. البته باید به معادله و اسامی مجموعه‌ها توجه کافی شود. مثلاً، مجموعهٔ $A \ :\ x = 0$ در $\mathbb{R}$ نقطهٔ $O$ است، در $\mathbb{R}^2$ برابر $y$ـمحور است و در $\mathbb{R}^3$ برابر $yz$ـصفحه می‌باشد.

**۱۵.۱.۱ تعمیم و قرارداد.** به صورت مشابه قبل $\mathbb{R}^4$ را مجموعهٔ همهٔ چهارتایی‌های مرتب از اعداد حقیقی می‌توان تعریف کرد و یا به شکل کلی تعریف نمود:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \;\middle|\; x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

در واقع، از این پس $2 \leq n$ و در قالب موارد $n = 2$ یا $n = 3$ است.

**۱۶.۱.۱ تمرین.** هر یک از نقاط داده شده را در صفحه و یا در فضا نشان دهید: $(1,-2)$، $(-1,3)$، $(1,1)$، $(0,2)$، $(1,1,1)$، $(1,0,1)$، $(0,1,1)$، $(1,1,0)$، $(1,0,0)$، $(-1,1,-1)$، $(-1,-1,1)$ و $(-1,-2,-3)$.

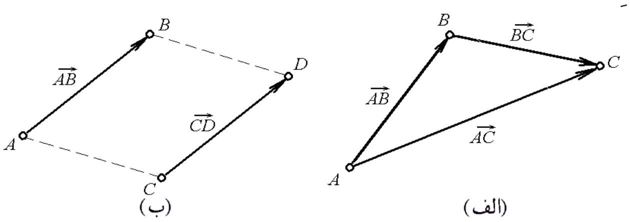
## ۲.۱ بردار

مهمترین مفهوم پس از نقطه، بردار است. بردار وسیله‌ای برای بیان جهت و حرکت است. در واقع اولین استفادهٔ از بردار در بیان تغییر مکان یک جسم از یک نقطهٔ آغازی به یک نقطهٔ پایانی بوده است. این امر انگیزه‌ای برای تعریف بردار مقید می‌باشد.

**۱.۲.۱ تعریف.** پاره‌خط جهتدار با ابتدای در نقطهٔ $A$ و انتهای در نقطهٔ $B$ را **بردار مقید** با شروع $A$ و پایان $B$ نامیده و با نماد $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر $\overrightarrow{AB}$ عبارت از زوج مرتب $(A, B)$ است. در صورتی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را برابر گوئیم که $A = C$ و $B = D$.

مجموعهٔ همهٔ بردارهای مقید در $\mathbb{R}^n$ را با نماد $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. حاصل جمع بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را به شکل $\overrightarrow{AC}$ تعریف می‌کنیم (به شکل ۵.۱ـالف توجه شود).

### ۲.۲.۱ تعبیر فیزیکی بردار مقید.
از نظر فیزیک، بردار $\overrightarrow{AB}$ به معنی تغییر مکان از $A$ به $B$ می‌باشد. یعنی وسیله‌ای برای توضیح **جابجایی** می‌باشد. به این وسیله می‌توان حرکت را که عبارت از مجموعه‌ای از جابجایی‌ها می‌باشد، توضیح داد.




شکل ۵.۱: الف) بردار مقید
ب) بردارهای همسنگ

### ۳.۲.۱ تعریف.
فرض کنید $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دو بردار مقید باشند. در صورتی می‌گوئیم این دو بردار **همسنگ** هستند که چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد؛ یعنی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ هم جهت، هم طول و هم راستا باشند. در این صورت می‌نویسیم $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$ (شکل ۵.۱—ب).

### ۴.۲.۱ قضیه.
این طور می‌توان اظهار داشت که دو بردار در صورتی همسنگ هستند که طول پاره‌خط‌های حاصل از تصویر آنها بر هر سه محور مختصاتی، یکی باشد. رابطهٔ همسنگی در بین بردارهای مقید، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. یعنی به ازای هر $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$ ای

الف) $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{AB}$.

ب) اگر $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$، آنگاه $\overrightarrow{CD}\sim\overrightarrow{AB}$.

ج) اگر $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CD}\sim\overrightarrow{EF}$، آنگاه $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{EF}$.

### ۵.۲.۱ قضیه.
شرط لازم و کافی برای این که $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشد؛ آن است که

$$\begin{aligned} x_B-x_A &= x_D-x_C \\ y_B-y_A &= y_D-y_C \\ z_B-z_A &= z_D-z_C \end{aligned}$$

### ۶.۲.۱ مثال.
۱) بردارهای مقید $\overrightarrow{(۲,-۱,۱)(۵,۳,۲)}$ و $\overrightarrow{(۱,۰,۲)(۴,۴,۳)}$ همسنگ هستند، زیرا

$$\begin{aligned} (۵)-(۲) &= (۴)-(۱), \\ (۳)-(-۱) &= (۴)-(۰), \\ (۲)-(۱) &= (۳)-(۲) \end{aligned}$$

مثال ۲) بردارهای مقید $\overrightarrow{(۱,-۱,۰)(۴,۵,۳)}$ و $\overrightarrow{(۱,۲,۳)(۲,۱,۵)}$ همسنگ نیستند، زیرا $x_D-x_C=(۲)-(۱)$ برابر $x_B-x_A=(۴)-(۱)$ نیست.

### ۷.۲.۱ تعریف.
فرض کنید $\overrightarrow{AB}$ بردار مقید است. مجموعهٔ همهٔ بردارهای مقید $\overrightarrow{CD}$ همسنگ با $\overrightarrow{AB}$ را **بردار آزاد** با نمایندهٔ $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم. این مجموعه دارای عضوی به شکل $\overrightarrow{OC}$ می‌باشد که در آن

$$C=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$

مجموعهٔ مذکور را با نماد $\mathbf{C}$ نشان داده و به آن **بردار مکانی نقطهٔ** $C$ می‌گوئیم. مجموعهٔ همهٔ بردارهای آزاد در $\mathbb{R}^۳$ را با نماد $\mathbb{R}^۳$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{R}^۳=\left\{\overrightarrow{(x,y,z)}\;\middle|\;x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

برای تجسم بردار آزاد می‌توان چنین کرد: ابتدا بردار با ابتدای $O$ و انتهای $C$ را در نظر گرفته و سپس فرض کنید که ابتدای آن آزاد است و انتهای آن همواره طوری قرار می‌گیرد که بردار حاصل با $\overrightarrow{OC}$ همسنگ باشد.

### ۸.۲.۱ مثال.
۱) بردار مقید $\overrightarrow{(۱,۲,-۱)(۳,۴,۲)}$ نمایندهٔ بردار آزاد $\overrightarrow{(۲,۲,۳)}$ است.

**مثال ۲)** بردارهای مقید $\overrightarrow{(۱,۲,-۱)(۰,۳,۲)}$ و $\overrightarrow{(۴,۳,۰)(۳,۴,۳)}$ یک بردار آزاد را مشخص می‌کنند، یعنی بردار $\overrightarrow{(-۱,۱,۳)}$.

**مثال ۳)** اگر $A$ دلخواه باشد، آنگاه $\overrightarrow{AA}$ نمایندهٔ بردار آزاد **صفر** $\mathbf{O}=\overrightarrow{(۰,۰,۰)}$ خواهد بود.

**مثال ۴)** اگر $\overrightarrow{AB}$ نمایندهٔ $\mathbf{C}=\overrightarrow{(a,b,c)}$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{BA}$ نمایندهٔ $-\mathbf{C}=\overrightarrow{(-a,-b.-c)}$ است.

### ۹.۲.۱ تمرین.
بردار آزاد نظیر به هر یک از بردارهای مقید زیر را مشخص کنید

۱) $\overrightarrow{(۱,۲,-۱)(۳,۰,۱)}$

۲) $\overrightarrow{(۱,-۱,۱)(۲,۱,۱)}$

۳) $\overrightarrow{(۱,-۱,۲)(۳,۲,۱)}$

۴) $\overrightarrow{(۱,۲,۳)(۳,۲,۱)}$

۵) اعداد $x$، $y$ و $z$ را طوری بیابید که
$$\overrightarrow{(x-y,y-z,x-z)(۱,۱,۱)}\sim\overrightarrow{(۲,۱,-۱)(z,y,x)}$$

۶) نشان دهید که تناظری یکبیک بین بردارهای مقید همسنگ با یک بردار مقید مفروض وصفحهٔ اقلیدسی وجود دارد.

**۱۰.۲.۱ اعمال بر بردارها.** فرض کنید $\mathbf{u} = \overrightarrow{(a,b,c)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(x,y,z)}$ در $\mathbb{R}^۳$ قرار دارند و $\alpha \in \mathbb{R}$. در این صورت، مجموع $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و حاصلضرب $\alpha$ در $\mathbf{u}$ را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{(a+x, b+y, c+z)}$$
$$\alpha\mathbf{u} = \overrightarrow{(\alpha a, \alpha b, \alpha c)}$$

**۱۱.۲.۱ قضیه.** اگر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^۳$ و $a,b\in\mathbb{R}$، آنگاه

۱) بسته بودن جمع: $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbb{R}^۳$

۲) شرکتپذیری جمع: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

۳) وجود خنثی جمعی: $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

۴) وجود قرینهٔ جمعی: $\mathbf{u}+(-۱)\,\mathbf{u}=\mathbf{0}$

۵) تعویضپذیری جمع: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

۶) بسته بودن ضرب اسکالر: $a\mathbf{u}\in\mathbb{R}^۳$

۷) شرکتپذیری ضرب اسکالر: $a\,(b\mathbf{u}) = (ab)\,\mathbf{u}$

۸) توضیعپذیری ضرب در جمع: $a\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

۹) وجود خنثی ضرب اسکالر: $۱\mathbf{u}=\mathbf{u}$

به این ترتیب اصطلاحاً گفته می‌شود که $\mathbb{R}^۳$ به همراه جمع و ضرب مشروح در ۹.۲.۱ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

**۱۲.۲.۱ تمرین.** ۱) $x$، $y$ و $z$ را طوری بیابید که

$$\overrightarrow{(۱,۲,-۱)} = x\overrightarrow{(۱,۱,۰)} + y\overrightarrow{(۱,۰,۱)} + z\overrightarrow{(۰,۱,۱)}.$$

۲) فرض کنید $\mathbf{w} = \overrightarrow{(۳,۲,۱)} \in \mathbb{R}^۳$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-۱,۲,۱)}$ و $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۱,۱)}$ در این صورت، مقادیر $۵\mathbf{u}+\mathbf{v}$، $۳\mathbf{u}$، $-۲\mathbf{v}$، $۵\mathbf{u}$، $\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w}$، $\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}+۲\mathbf{v}+۳\mathbf{w}$ را محاسبه کنید.

۳) نشان دهید که اعداد $x$ و $y$ صادق در شرط

$$\overrightarrow{(۱,۲,-۱)} = x\overrightarrow{(۳,۱,۲)} + y\overrightarrow{(۱,-۱,۱)}$$

وجود ندارند.

**۱۳.۲.۱ قرارداد.** از این پس بجای گفتن این مطلب که $\overrightarrow{AB}$ یک نماینده $\mathbf{C}$ است از نماد $\mathbf{C}=\overrightarrow{AB}$ استفاده می‌کنیم. یعنی $\mathbf{C}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$.

**۱۴.۲.۱ قرارداد.** نقطهٔ $C$ انتهای بردار $\mathbf{C}$ است و بردار $\mathbf{C}$ عبارت از بردار حاصل از متصل نمودن مبداء به نقطهٔ $C$ است. به همین دلیل در غالب موارد بین $C$ و $\mathbf{C}$ فرقی قایل نمی‌شویم. اگر چنانچه در بحثی نماد بردار فراموش شد، از روی محتوی بحث می‌توان بردار بودن اشیاء مورد بحث را فهمید.

**۱۵.۲.۱ تعمیم.** تمام مباحث بالا را به ابعاد بالاتر از ۳ می‌توان تعمیم داد، بی‌آنکه کار خاصی انجام شود. به این ترتیب سخن گفتن از فضای اقلیدسی $n-$بعدی $\mathbb{R}^n$ و فضای برداری $n-$بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مجاز است.

**۱۶.۲.۱ تمرین.**

۱) فرض کنید $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۲,-۱,۳)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-۱,۱,۲,۴)}$ دو بردار در $\mathbb{R}^۴$ باشند. مطلوبست محاسبهٔ $۲\mathbf{u}$، $-۵\mathbf{v}$، $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $۲\mathbf{u}-۴\mathbf{v}$.

۲) اعداد $a$، $b$، $c$ و $d$ را طوری بیابید که

$$\overrightarrow{(۱,-۱,۲,۳)} = a\overrightarrow{(-۱,۱,۱,۱)} + b\overrightarrow{(۱,-۱,۱,۱)} + c\overrightarrow{(۱,۱,-۱,۱)} + d\overrightarrow{(۳,۱,۲,۵)}$$

۳) نشان دهید که اعداد $a$، $b$ و $c$ ای که در رابطهٔ زیر صدق کنند، نمی‌توان یافت

$$\overrightarrow{(٦,۹,۱۲,۱۷,۱۸)} = a\overrightarrow{(۱,۲,۳,۴,۵)} + b\overrightarrow{(۲,۳,۴,۵,٦)} + c\overrightarrow{(۳,۴,۵,٦,۷)}$$

## ۳.۱ استقلال، وابستگی، پایه و بعد

چرا می‌گوئیم فضا سه بعدی‌است، در حالی که گفته می‌شود صفحه دو بعدی است؟ اساساً بعد یک فضا به چه معنی است؟ هدف از این بخش پاسخ به این پرسش است.

**۱.۳.۱ تعریف.** فرض کنید $\mathbf{u}_۱,\cdots,\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ بردارند. منظور از یک **ترکیب خطی** از این بردارها، عبارتی است به شکل $a_۱\mathbf{u}_۱+\cdots+a_k\mathbf{u}_k$ که در آن $a_۱,\cdots,a_k \in \mathbb{R}$ عدد هستند. مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی این بردارها را **فضای تولید شده** توسط آنها نامیده و با نماد $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_۱,\cdots,\mathbf{u}_k\}$ نشان می‌دهیم.

**۲.۳.۱ مثال.** ۱) فرض کنیم $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱,-۱)} \in \mathbb{R}^۲$، $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۲,۱)}$. در این صورت $۵\mathbf{u}+۳\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱۳,۲)}$، $۰\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{(۱,-۱)}$ و $\mathbf{u}-۲\mathbf{v} = \overrightarrow{(۰,۳)}$ نمونه‌هایی از ترکیبات خطی این دو بردار می‌باشند.

**مثال ۲)** در صورتی که $\mathbf{u} = \overrightarrow{(۱,۲,-۱)}$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(۳,۴,۲)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(۵,٦,۵)}$، داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\} &= \left\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w} \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{(a+۳b+۵c)\mathbf{i}+(۲a+۴b+٦c)\mathbf{j} \right.\\ &\qquad \left. +(-a+۲b+۵c)\mathbf{k} \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $\alpha = a+3b+5c$ و $\beta = 2a+4b+6c$، آنگاه می‌توان $a$ و $b$ را بر حسب $\alpha$، $\beta$ و $c$ به شکل زیر بدست آورید $a = c-2\alpha+3\frac{\beta}{2}$ و $b = -2c+\alpha-\frac{\beta}{2}$. درنتیجه

$$-a+2b+5c = 4\alpha-\frac{5}{2}\beta$$

پس با فرض $\alpha = a$ و $\beta = 2b$، مجموعهٔ $\mathrm{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
&= \left\{\overrightarrow{\left(\alpha,\beta,4\alpha-\frac{5}{2}\beta\right)} \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\overrightarrow{(a,2b,4a-5b)} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{a\overrightarrow{(1,0,4)}+b\overrightarrow{(0,2,-5)} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \mathrm{span}\left\{\overrightarrow{(1,0,4)},\overrightarrow{(0,2,-5)}\right\}
\end{aligned}$$

**مثال ۳)** فرض کنید $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1,-1)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-1,2)}$، در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} &= \{a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \mid a,b\in\mathbb{R}\}\\
&= \left\{\overrightarrow{(a-b,2b-a)} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

زیرا اگر $\alpha = a-b$ و $\beta = 2b-a$، آنگاه $b = \frac{\alpha+\beta}{3}$ و $a = 2\alpha+\beta$.

**۳.۳.۱ قضیه.** اگر $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_k\}$ یک فضای برداری است. یعنی نه خاصیت $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$ از قضیهٔ ۱.۲.۱ را دارد.

**۴.۳.۱ تعریف.** بردارهای $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ را در صورتی **وابستهٔ خطی** گوئیم که یک ترکیب صفر غیر بدیهی داشته باشند. یعنی، اعداد $a_1,\cdots,a_k$ که همگی همزمان صفر نیستند، به گونه‌ای وجود داشته باشند که $a_1\mathbf{u}_1+\cdots+a_k\mathbf{u}_k$ صفر شود. اگر بردارهایی وابستهٔ خطی نباشند، **مستقل خطی** گفته می‌شوند.

**۵.۳.۱ مثال.** ۱) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1,-1,2)}$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(3,0,1)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(1,-1,1)}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی‌اند، زیرا اگر فرض کنیم $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w} = \mathbf{O}$، آنگاه

$$\overrightarrow{(a+3b+c,-a-c,2a+b+c)} = \overrightarrow{(0,0,0)}$$

و در نتیجه

$$\begin{cases} a+3b+c=0\\ -a-c=0\\ 2a+b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3b=0\\ c=a\\ 3a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7a=0\\ c=a\\ b=-3a\end{cases}$$

پس $a=b=c=0$ و بنابراین بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ مستقل خطی‌اند.

**مثال ۲)** بردارهای $\mathbf{u} = \overrightarrow{(3,0,7,10)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(1,2,3,4)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(1,-1,2,3)}$ در $\mathbb{R}^4$ وابستهٔ خطی‌اند، زیرا، اگر فرض شود $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w} = \mathbf{O}$، آنگاه می‌بایستی

$$\begin{cases} 3a+b+c=0\\ 2b-c=0\\ 7a+3b+2c=0\\ 10a+4b+3c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+3b=0\\ c=2b\\ 10a+10b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2b\\ a=-b\end{cases}$$

اگر فرض شود $b=1$، آنگاه $a=-1$ و $c=2$ و بنابرین $-\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w}=0$. یعنی این سه بردار وابستهٔ خطی هستند.

**۶.۳.۱ تمرین.** کدام یک از مجموعه بردارهای داده شده مستقل خطی هستند؟ چرا؟

۱) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{(0,1)}$,

۲) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(3,-2)}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-6,4)}$

۳) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1,2,-1)}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{(3,4,2)}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{(4,6,1)}$,

۴) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1,2,4)}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{(-3,10,21)}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{(-4,8,17)}$,

۵) $\mathbf{u} = \overrightarrow{(1,0,0,0)}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{(5,2,3,1)}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{(0,4,7,-2)}$, $\mathbf{n} = \overrightarrow{(0,0,-3,1)}$

۶) نشان دهید که بردارهای $\mathbf{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{(c,d)}$ وقتی وتنها وقتی مستقل خطی‌اند که $ad \neq bc$. در حالت $d \neq 0$ و $b \neq 0$، این شرط به معنی $a/b = c/d$ است.

۷) نشان دهید که هر بردار دلخواه از $\mathbb{R}^3$ را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\mathbf{u} = \overrightarrow{(-1,1,1)}$، $\mathbf{v} = \overrightarrow{(1,-1,1)}$ و $\mathbf{w} = \overrightarrow{(1,1,-1)}$ می‌توان نوشت.

**۷.۳.۱ تعریف.** در صورتی بردارهای $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ فضا را **تولید** می‌کنند که هر عضو از $\mathbb{R}^n$ را به صورت ترکیبی خطی از آنها بتوان نوشت، یعنی $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_k\}$. در صورتی می‌گوئیم بردارهای $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ تشکیل یک **پایه** برای $\mathbb{R}^n$ می‌دهند که اولاً مستقل خطی باشد و در ثانی فضا را تولید کنند. در حالت کلی، هر مجموعهٔ مستقل خطی از بردارها که فضای برداری $V$ را تولید کنند، پایدار برای $V$ نامیده می‌شوند.

**۸.۳.۱ قضیه.** تعداد بردارهای هر پایه از فضای $\mathbb{R}^n$ دقیقاً برابر $n$ است. این عدد مشترک را **بعد فضای** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم. بنابراین، اگر $n < k$، آنگاه هر $k$ تعداد از بردارهای در $\mathbb{R}^n$ وابسته خطی هستند.

**۹.۳.۱ قضیه.** اگر $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ پایه بوده و $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ برداری دلخواه باشد، آنگاه اعداد منحصر بفرد $a_1,\cdots,a_n$ طوری یافت می‌شود که $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1+\cdots+a_n\mathbf{u}_n$. این اعداد را مختصات $\mathbf{v}$ بر پایهٔ $\mathcal{B}$ می‌نامیم، قرار داد می‌کنیم $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{(a_1,\cdots,a_n)}$.

**۱۰.۳.۱ مثال.** ۱) فرض کنیم $\mathbf{i} = \overrightarrow{(1,0)}$ و $\mathbf{j} = \overrightarrow{(0,1)}$. در این صورت $\mathcal{B}=\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ نامیده می‌شود. بعلاوه، $\overrightarrow{(a,b)} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$.

**مثال ۲)** فرض کنیم $\mathbf{i} = \overrightarrow{(1,0,0)}$، $\mathbf{j}=\overrightarrow{(0,1,0)}$ و $\mathbf{k}=\overrightarrow{(0,0,1)}$. در این صورت $\mathcal{B}=\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^3$ نامیده می‌شود. بعلاوه $\overrightarrow{(a,b,c)} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$.

**مثال ۳)** بردارهای $\mathbf{u}=\overrightarrow{(1,1,0)}$، $\mathbf{v}=\overrightarrow{(1,0,1)}$ و $\mathbf{w}=\overrightarrow{(0,1,1)}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند. زیرا، اولاً مستقل خطی‌اند: از فرض $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}=\mathbf{O}$ نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=-a \\ -2a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0$$

و در ثانی فضا را تولید می‌کنند از فرض

$$(\alpha,\beta,\gamma) = a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}$$

داریم

$$\begin{cases} a+b=\alpha \\ a+c=\beta \\ b+c=\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\alpha \\ b-c=\alpha-\beta \\ b+c=\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\alpha-b \\ 2b=\alpha-\beta+\gamma \\ 2c=-\alpha+\beta+\gamma \end{cases}$$

در نتیجه

$$a=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\ ,\ b=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\ ,\ c=\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

یعنی، اگر $\mathcal{B}=\left\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\right\}$، آنگاه

$$\left[\overrightarrow{(\alpha,\beta,\gamma)}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{(\alpha+\beta-\gamma,\alpha-\beta+\gamma,-\alpha+\beta+\gamma)}$$

**مثال ۴)** بردارهای $\mathbf{u}_1=\overrightarrow{(1,0,0,0)}$، $\mathbf{u}_2=\overrightarrow{(1,1,0,0)}$، $\mathbf{u}_3=\overrightarrow{(1,1,1,0)}$ و $\mathbf{u}_4=\overrightarrow{(1,1,1,1)}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ تشکیل می‌دهند، زیرا، اولاً مستقل خطی‌اند و از فرض

$$a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2+a_3\mathbf{u}_3+a_4\mathbf{u}_4=\mathbf{0}$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=0 \\ a_2+a_3+a_4=0 \\ a_3+a_4=0 \\ a_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-a_2-a_3-a_4 \\ a_2=-a_3-a_4 \\ a_3=-a_4 \\ a_4=0 \end{cases} \Rightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

و بعلاوه، فضا را تولید می‌کنند و از فرض

$$\overrightarrow{(a,b,c,d)} = a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2+a_3\mathbf{u}_3+a_4\mathbf{u}_4$$

نتیجه می‌گردد که

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=a \\ a_2+a_3+a_4=b \\ a_3+a_4=c \\ a_4=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=a-b \\ a_2=b-c \\ a_3=c-d \\ a_4=d \end{cases}$$

بنابراین، اگر $\mathcal{B}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$، آنگاه

$$\left[\overrightarrow{(a,b,c,d)}\right]_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{(a-b,b-c,c-d,d)}$$

**۱۱.۳.۱ تمرین.** در هر یک از موارد زیر نشان دهید که بردارهای $\mathbf{e}_i$ تشکیل یک پایه می‌دهند و سپس بردار $\mathbf{v}$ را بر پایهٔ آنها بیان کنید:

۱) $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{(1,2)},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{(3,1)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(2,3)}.$

۲) $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{(1,0)},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{(1,1)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(x,y)}.$

۳) $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{(2,2,-1)},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{(2,-1,2)},$
$\mathbf{e}_3=\overrightarrow{(-1,2,2)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(1,1,1)}.$

۴) $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{(1,5,-1)},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{(3,0,1)},$
$\mathbf{e}_3=\overrightarrow{(5,4,1)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(x,1,y)}.$

۵) $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{(1,2,3)},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{(0,2,3)},$
$\mathbf{e}_3=\overrightarrow{(0,0,3)},\ \mathbf{v}=\overrightarrow{(x,y,z)}.$

۶) $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{(1,2,1,1)},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{(2,3,1,0)},$
$\mathbf{e}_3=\overrightarrow{(3,1,1,-2)},\mathbf{e}_4=\overrightarrow{(4,2,-1,-6)},$
$\mathbf{v}=\overrightarrow{(0,0,2,7)}.$

۷) $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{(1,1,1,1)},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{(2,2,2,0)},$
$\mathbf{e}_3=\overrightarrow{(3,3,0,0)},\ \mathbf{e}_4=\overrightarrow{(4,0,0,0)},\mathbf{v}=\overrightarrow{(x,y,z,t)}.$

در صورتی که حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در بین بردارهای $\mathbf{u}_1$، ... و $\mathbf{u}_k$ را بعد فضای $\mathrm{span}\left\{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_k\right\}$

تعریف کنیم، بعد فضای تولید شده توسط هر دسته از بردارهای زیر را مشخص کنید:

۸) $\mathbf{u}_۱ = \overrightarrow{(۱,-۱)},\ \mathbf{u}_۲ = \overrightarrow{(۳,۲)},\ \mathbf{u}_۳ = \overrightarrow{(۱,-۱)}.$

۹) $\mathbf{u}_۱ = \overrightarrow{(۱,۲,-۱)},\ \mathbf{u}_۲ = \overrightarrow{(۳,۴,۲)},\ \mathbf{u}_۳ = \overrightarrow{(۷,۱۰,۳)}.$

۱۰) $\mathbf{u}_۱ = \overrightarrow{(۱,۲,۲,-۱)},\ \mathbf{u}_۲ = \overrightarrow{(۲,۳,۲,۵)},$
$\mathbf{u}_۳ = \overrightarrow{(-۱,۴,۳,-۱)},\ \mathbf{u}_۴ = \overrightarrow{(۲,۹,۳,۴)},$
$\mathbf{u}_۵ = \overrightarrow{(۱,-۱,۱,-۱)}.$

## ۴.۱ ماتریس

ماتریس تعمیم طبیعی مفهوم بردار است و دارای کاربردهای فراوانی در سایر بخشهای ریاضی و نیز صنعت می‌باشد. به بیان ساده، ماتریس آرایه‌ای مرتب از اعداد است.

**۱.۴.۱ تعریف.** منظور از ماتریس $n\times m$، گردایه‌ای مرکب از $nm$ عدد به شکل مستطیل

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱m} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

است که در $n$ سطر و $m$ ستون مرتب شده‌اند. در این صورت، به شکل خلاصه می‌نویسیم $A = [a_{ij}]$ و $a_{ij}$ را درآیهٔ $(i,j)$ ام $A$ می‌نامیم (یعنی، درآیهٔ واقع در سطر $i$ ام و ستون $j$ ام از ماتریس $A$). البته در ادامه ماتریسهایی خواهیم داشت که در آنها برخی از $a_{ij}$ ها عملگر، تابع و یا بردارند (بعنوان، مثال به صورت قضیهٔ استوکس ۵.۸.۹ مراجعه کنید). مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times m$ را با نماد $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ نشان می‌دهیم.

**۲.۴.۱ قضیه.** اگر به ازای $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathrm{Mat}\,(n\times m)$ و نیز $a\in\mathbb{R}$ تعریف کنیم $A+B := [a_{ij}+b_{ij}]$ و $aA := [aa_{ij}]$. در این صورت $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ به همراه عمل جمع و ضرب مشروح در بالا، یک فضای برداری است. به این معنی که به ازای $A,B,C\in\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ و $a,b\in\mathbb{R}$ داریم:

۱) $A+B\in\mathrm{Mat}\,(n\times m)$,

۲) $A+(B+C) = (A+B)+C$,

۳) $A+O = O+A = A$,　　۴) $A+B = B+A$,

۵) $A+(-۱)\,A = O$,　　۶) $aA\in\mathrm{Mat}\,(n\times m)$,

۷) $a\,(bA) = (ab)\,A$,　　۸) $a\,(A+B) = aA+aB$,

۹) $۱A = A$.

که در اینجا $O = [o_{ij}]$ ماتریس صفر است که همهٔ درآیه‌های صفرند. بعلاوه، قرینهٔ جمعی ماتریس $A = [a_{ij}]$ عبارت از $(-۱)\,A = [-a_{ij}]$ است که از منفی کردن همهٔ درآیه‌های ماتریس $A$ به دست آمده است.

**۳.۴.۱ مثال.** ۱) اگر $n = ۱$، اعضاء $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ را **ماتریسهای سطری** می‌نامند. عملاً $\mathbb{R}^۲ = \mathrm{Mat}\,(۱\times ۲)$ و $\mathbb{R}^۳ = \mathrm{Mat}\,(۱\times ۳)$.

**مثال ۲)** اگر $m = n$، اعضاء $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ را **ماتریسهای مربعی** می‌نامند، نظیر

$$[۱],\qquad \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

**مثال ۳)** در $\mathrm{Mat}\,(۲\times ۳)$ داریم

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ٦ & ۱ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

**مثال ۴)** در $\mathrm{Mat}\,(۲\times ۲)$ داریم

$$۲\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۱۱ \\ -٦ & -۱۱ \end{bmatrix}$$

**۴.۴.۱ تمرین.**

۱) آیا ماتریسهای $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ مستقل خطی‌اند؟

۲) فرض کنید $A$، $B$ و $C$ بترتیب $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ هستند. در این صورت $۲A$، $B-C$، $A+۲B+C$ و $A-C$ را محاسبه کنید.

۳) فرض کنید $E_{ij}$ ماتریس $n\times m$ ای باشد که همهٔ درآیه‌های آن صفرند بجز مختص $(i,j)$ ام آن که برابر یک است. نشان دهید که مجموعهٔ $E_{ij}$ ها تشکیل یک پایه برای $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$. بعد $\mathrm{Mat}\,(n\times m)$ چقدر است؟

۴) نشان دهید ماتریسهای داده شده یک پایه برای $\mathrm{Mat}\,(۲\times ۲)$ تشکیل می‌دهند، سپس ماتریس دلخواه $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ را بر حسب آنها بیان کنید:

$$A_۱ = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\qquad A_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\qquad A_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

**۵.۴.۱ تعریف.** اگر $A=[a_{ij}]$ ماتریس $n\times m$ و $B=[b_{ij}]$ ماتریس $m\times l$ باشند، آنگاه **حاصلضرب** $AB$ را ماتریس $n\times l$ ای تعریف می‌کنیم که درآیهٔ $(i,j)$ ام آن برابر

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{im}b_{mj} \\ &= \begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

است، که از حاصلضرب سطر $i$ ام از ماتریس $A$ در ستون $j$ ام از ماتریس $B$ حاصل شده است.

**۶.۴.۱ مثال.** با توجه به تعریف ضرب ماتریسها داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۲+۵ \\ ۱+۶-۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -۱-۲ & ۰+۲ \\ ۳-۴ & ۰+۴ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۱۳ \\ ۶ & ۹ & ۲۱ \\ ۱۱ & ۱۳ & ۳۵ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**۷.۴.۱ قضیه.** اگر $I_n$ ماتریس $n\times n$ ای باشد که قطر آن یک و سایر اعضاء آن صفرند (ماتریس همانی $n\times n$)، و نیز اگر $A$، ماتریس $n\times m$ باشد، آنگاه $AI_m=A$ و $I_nA=A$. بعلاوه، اگر $A$، $B$ و $C$ ماتریس بوده و $a$ عدد باشد، در این صورت

۱) $A(B+C)=AB+AC$    ۲) $A(BC)=(AB)C$

۳) $a(AB)=(aA)B=A(aB)$    ۴) $۱A=A$

**۸.۴.۱ تعریف.** ماتریس مربعی $A$ را در صورتی معکوسپذیر گویند که ماتریس مربعی $B$ دیگری چنان یافت گردد که $AB=BA=I_n$. در این صورت $B$ را معکوس $A$ نامیده و با نماد $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

**۹.۴.۱ مثال.** ۱) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ معکوسپذیر است، زیرا اگر فرض کنیم $A$ ماتریس معکوسپذیر است و $A^{-۱}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{bmatrix}$، آنگاه فرض $AA^{-۱}=I_۲$ به معنی $\begin{bmatrix} \alpha+۲\gamma & \beta+۲\eta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است. در نتیجه

$$\begin{cases} \alpha+۲\gamma=۱ \\ -\alpha=۰ \\ \beta+۲\eta=۰ \\ -\beta=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲\gamma=۱ \\ \alpha=۰ \\ ۲\eta-۱=۰ \\ \beta=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۰ \\ \beta=-۱ \\ \gamma=۱/۲ \\ \eta=۱/۲ \end{cases}$$

پس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix}$. برای اثبات این که ماتریس مذکور معکوس $A$ است، باید محاسبات زیر را انجام دهیم

$$\begin{aligned} AA^{-۱} &= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = A^{-۱}A \end{aligned}$$

**مثال ۲)** ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ معکوسپذیر نیست، زیرا اگر فرض شود $B=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{bmatrix}$ و $AB=I_۲$، آنگاه

$$\begin{bmatrix} ۲\alpha+۲\gamma & ۲\beta+۲\eta \\ -\alpha-\gamma & -\beta-\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس بایستی $۲\alpha+۲\gamma=۱$ و $-\alpha-\gamma=۰$، که تناقض است.

**۱۰.۴.۱ تمرین.**

۱) حاصلضرب $A^{-۱}BA$ را در حالی بیابید که

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \square$$

۲) نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وقتی و تنها وقتی معکوسپذیر است که $ad\neq bc$، بعلاوه معکوس آن $\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است.

۳) نشان دهید که اگر $ABC=I$، آنگاه $CAB=BCA=I$.

۴) فرض کنید $P_{ij}$ ماتریس حاصل از تعویض سطر $i$ ام و سطر $j$ ام ماتریس همانی $I_۳$ باشد. در این صورت نشان دهید:
(الف) $P_{ij}^۲=I_۳$. (ب) $P_{ij}P_{jk}=P_{ik}$. (ج) $P_{ij}$ از تعویض ستونهای $i$ ام و $j$ ام ماتریس $I_۳$ حاصل می‌شود.
(د) اگر $A$ ماتریس $۳\times ۳$ باشد، آنگاه $P_{ij}A$ عبارتست از ماتریس حاصل از تعویض سطرهای $i$ ام و $j$ ام ماتریس $A$.
(ه) اگر $A$ ماتریس $۳\times ۳$ باشد، آنگاه $AP_{ij}$ عبارتست از ماتریس حاصل از تعویض ستونهای $i$ ام و $j$ ام ماتریس $A$.
(و) ماتریس $P_{ij}$ معکوسپذیر است.

۵) با محاسبهٔ $AB$ و $BA$ در مورد $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$، نشان دهید که در حالت کلی این دو برابر نیستند. یعنی، ضرب ماتریسها تعویضپذیر نیست.

٦) فرض کنید $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$، $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$، $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. در این صورت، نشان دهید که

$a)\ E^2 = E \qquad b)\ P^2 = -E$

$c)\ Q^2 = E \qquad d)\ R^2 = E$

$e)\ EP = PE = P \qquad f)\ EQ = QE = Q$

$g)\ PQ + QP = O \qquad h)\ RP + PR = O$

$i)\ QR + RQ = O j)\ P + Q + R + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

۷) نشان دهید که اگر $A$، $B$، $C$ و $D$ بترتیب ماتریسهایی $m \times k$، $p \times \ell$، $k \times n$ و $\ell \times q$ باشند، آنگاه $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & O \\ O & BD \end{pmatrix}$.

۸) نشان دهید که اگر $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$، آنگاه $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $A^n = O$ که $n \geq 3$.

## ۵.۱ دترمینان

دترمینان تنها برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌گردد. تعریف دترمینان به شکل بازگشتی است. به این ترتیب که برای تعریف دترمینان ماتریس $n \times n$ می‌باید قبلاً دترمینان ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ تعریف شده باشد.

**۱.۵.۱ تعریف.** دترمینان ماتریس مربعی $A$ را با نماد $|A|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) دترمینان ماتریس مربعی $1 \times 1$: $|a| = a$

۲) دترمینان ماتریس مربعی $2 \times 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

۳) دترمینان ماتریس مربعی $3 \times 3$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

۴) فرض کنید دترمینان ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ قبلاً تعریف شده باشد و $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر $A_j$ برابر دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون $j$ ام ماتریس $A$ باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}A_{1n}$$

**۲.۵.۱ یادداشت.** در تعریف ۱.۵.۱ از سطر اول استفاده شده است. این تعریف را می‌توان به کمک هر سطر دیگر و یا هر یک از ستون‌های ماتریس ارائه نمود. قضیه‌ای از جبر خطی وجود دارد که هم‌ارزی این تعریف را نشان می‌دهد. در واقع، داریم

**۳.۵.۱ قضیه.** اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد و $A_{ij}$ دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر $i$ ام و ستون $j$ ام ماتریس $A$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{i+1} a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}A_{i2} + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}A_{in} \\ &= (-1)^{j+1} a_{1j}A_{1j} + (-1)^{i+2} a_{2j}A_{2j} + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{j+n} a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

**۴.۵.۱ مثال.** با توجه به تعریف دترمینان، داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(-1) = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= (2)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (3)\left[\begin{matrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right| \\ &\quad + (-1)\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2)(8+3) - (3)(10-3) \\ &\quad + (-1)(-5-4) = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= (3)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (3)(0-2) - (2)(1+1) \\ &\quad + (-1)(8-0) = -40 \end{aligned}$$

چون در سطر سوم از ماتریس زیر دو عضو صفر وجود دارد، آنرا بر حسب سطر سوم بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} &= (-۱)^{۳+۱}\,(۰)\,A_{۳۱} \\ &\quad + (-۱)^{۳+۲}\,(-۱)\,A_{۳۲} + (-۱)^{۳+۳}\,(۰)\,A_{۳۳} \\ &= A_{۳۲} = \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۳+۵ = ۸ \end{aligned}$$

**۵.۵.۱ تمرین.** دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را محاسبه کنید

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ & ۸ \\ ۵ & ۳ & ۱۱ \end{bmatrix} \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۹ \\ ۱ & ۸ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

$$۵)\ \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad ۶)\ \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

در غالب موارد، محاسبهٔ مستقیم دترمینان از روی تعریف، کاری بس وقتگیر است. به همین دلیل معمولاً برای ساده‌تر کردن محاسبهٔ آنها از خواص دترمینان استفاده می‌کنند.

### ۶.۵.۱ قضیه.

۱) اگر در دترمینانی جای دو سطر را عوض کنیم، علامت دترمینان عوض خواهد شد.

۲) اگر سطری از یک ماتریس را در عددی ضرب کنیم، دترمینان آن ماتریس در این عدد ضرب می‌شود.

۳) اگر مضربی از یک سطر را به سطر دیگری از آن ماتریس بیافزائیم، دترمینان آن ماتریس تغییر نمی‌کند.

۴) خواص بالا برای ستونها نیز صحیح است.

۵) اگر بالای قطر اصلی و یا پائین قطر اصلی صفر شود، دترمینان ماتریس با حاصلضرب عناصر قطر اصلی برابر است.

۶) اگر سطری از یک ماتریس برابر مضربی از یک سطر دیگر آن باشد، آنگاه دترمینان ماتریس صفر است.

۷) اگر ستونی از یک ماتریس برابر مضربی از یک ستون دیگر آن باشد، آنگاه دترمینان ماتریس صفر است.

۸) اگر یک سطر و یا یک ستون از ماتریسی صفر باشد، دترمینان آن ماتریس صفر است.

**۷.۵.۱ مثال.** ۱) به کمک قضیهٔ ۶.۵.۱ داریم

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۷ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} &\overset{(۱)}{=} \begin{vmatrix} ۰ & ۱۴ & ۵ \\ ۰ & ۱۳ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} \\ &= (-۱)^{۳+۱}\,(-۱) \begin{vmatrix} ۱۴ & ۵ \\ ۱۳ & ۱ \end{vmatrix} = -۵۱ \end{aligned}$$

که در (۱) ابتدا سه برابر سطر سوم به به سطر اول افزوده‌ایم و سپس دو برابر سطر سوم را به سطر دوم افزوده‌ایم.

**مثال ۲)** به کمک قضیهٔ ۶.۵.۱ داریم

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳ & -۱ \end{vmatrix} &\overset{(۱)}{=} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۷ \\ ۲ & ۳ & ۴ & -۹ \\ ۳ & ۲ & ۶ & -۱۶ \end{vmatrix} \\ &\overset{(۲)}{=} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۴ & -۳۰ \\ ۳ & ۲ & ۶ & -۳۰ \end{vmatrix} \overset{(۳)}{=} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & -۲ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۶ & -۳۰ \end{vmatrix} \\ &= (۱)\,(۱)\,(۴)\,(۱۵) = ۶۰ \end{aligned}$$

که در (۱) ستون اول را به ستون سوم افزوده‌ایم و پنج برابر ستون اول را از ستون چهارم کم کرده‌ایم؛ در (۲) هفت برابر ستون دوم را از ستون چهارم کم کرده‌ایم؛ در (۳) سطر چهارم را از سطر سوم کم کرده‌ایم.

**مثال ۳)** به کمک قضیهٔ ۶.۵.۱ داریم

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a & b & c \\ a^{۲} & b^{۲} & c^{۲} \end{vmatrix} &\overset{(۱)}{=} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & b-a & c-a \\ a^{۲} & b^{۲}-a^{۲} & c^{۲}-a^{۲} \end{vmatrix} \\ &\overset{(۲)}{=} (b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۱ & ۱ \\ a^{۲} & b+a & c+a \end{vmatrix} \\ &\overset{(۳)}{=} (b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۱ & ۰ \\ a^{۲} & b+a & c-b \end{vmatrix} \\ &= (b-a)\,(c-a)\,(c-b) \end{aligned}$$

که در (۱) ستون اول را از دو ستون دیگر کم کرده‌ایم؛ در (۲) از ستون دوم عدد $b-a$ و از ستون سوم عدد $c-a$ را فاکتور گرفته‌ایم؛ در (۳) ستون دوم را از ستون سوم کم کرده‌ایم.

**۸.۵.۱ تمرین.** دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را به کمک خواص دترمینان محاسبه کنید

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\text{۳)}\ \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad \text{۴)}\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

۵) تنها به کمک ۶.۵.۱ ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = \left(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}\right)^{۲}$$

۶) تنها به کمک ۵.۵.۱ ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = (۳a+b)b^{۲}$$

**۹.۵.۱ قضیه.** ماتریس مربعی $A$ وقتی و تنها وقتی معکوسپذیر است که $|A|$ مخالف صفر باشد. بعلاوه، $|A^{-۱}|$ برابر $۱/|A|$ است و $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$.

**۱۰.۵.۱ قضیه.** فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس مربعی با دترمینان $\Delta$ مخالف صفر است و $A_{ij}$ دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر $i$ ام و ستون $j$ ام ماتریس $A$ است. در این صورت $A^{-۱}$ برابر است با

$$\frac{۱}{\Delta}\begin{bmatrix} (-۱)^{۱+۱}A_{۱۱} & (-۱)^{۲+۱}A_{۲۱} & \cdots & (-۱)^{n+۱}A_{n۱} \\ (-۱)^{۱+۲}A_{۱۲} & (-۱)^{۲+۲}A_{۲۲} & \cdots & (-۱)^{n+۲}A_{n۲} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-۱)^{۱+n}A_{۱n} & (-۱)^{۲+n}A_{۲n} & \cdots & (-۱)^{n+n}A_{nn} \end{bmatrix}$$

**۱۱.۵.۱ مثال ۱).** فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، در این صورت

$$\begin{aligned} \Delta &= |A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۳ & -۶ \\ -۱ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -۳ & -۶ \\ ۵ & ۷ \end{vmatrix} = -۲۱+۳۰ = ۹ \end{aligned}$$

و لذا ماتریس $A$ معکوسپذیر است، بعلاوه

$$A_{۱۱} = \begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = -۱۰, \quad A_{۱۲} = \begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۸,$$

$$A_{۱۳} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۷, \quad A_{۲۱} = \begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = -۱۱,$$

$$A_{۲۲} = \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۷, \quad A_{۲۳} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۵,$$

$$A_{۳۱} = \begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۳, \quad A_{۳۲} = \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = -۶,$$

$$A_{۳۳} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۳.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A^{-۱} &= \frac{۱}{۹}\begin{bmatrix} (-۱۰) & -(-۱۱) & (۳) \\ -(۸) & (۷) & -(-۶) \\ (۷) & -(۵) & (-۳) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -۱۰/۹ & ۱۱/۹ & ۱/۳ \\ -۸/۹ & ۷/۹ & ۲/۳ \\ ۷/۹ & -۵/۹ & -۱/۳ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**مثال ۲)** ثابت کنید $(I+A)^{-۱} = A(A+I)^{-۱}$. چون معکوس در صورت وجود منحصر به فرد است و

$$\begin{aligned} (I+A^{-۱})(A(A+I)^{-۱}) &= (I+A^{-۱})A(A+I)^{-۱} \\ &= (A+A^{-۱}A)(A+I)^{-۱} \\ &= (A+I)(A+I)^{-۱} = I \end{aligned}$$

در نتیجه، حکم اثبات شده است.

**۱۲.۵.۱ تمرین.** معکوس هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید:

$$\text{۱)}\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \text{۲)}\ \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\text{۳)}\ \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} \qquad \text{۴)}\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ \alpha & \beta & \gamma & \theta \\ \alpha^{۲} & \beta^{۲} & \gamma^{۲} & \theta^{۲} \\ \alpha^{۳} & \beta^{۳} & \gamma^{۳} & \theta^{۳} \end{bmatrix}$$

۵) نشان دهید که اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $۳ \times ۳$ معکوسپذیر باشد، آنگاه $A^{-۱}$ برابر است با

$$\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۳} & a_{۱۲} \\ a_{۳۳} & a_{۳۲} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{۲۳} & a_{۲۱} \\ a_{۳۳} & a_{۳۱} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۳} & a_{۱۱} \\ a_{۲۳} & a_{۲۱} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۱} \\ a_{۳۲} & a_{۳۱} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

۷) ثابت کنید $(I+AB)^{-۱}A = A(I+BA)^{-۱}$.

۸) ثابت کنید $A^{-۱}+B^{-۱} = A^{-۱}(A+B)B^{-۱}$.

**۱۳.۵.۱ معکوسیابی یک ماتریس افراز شده.** فرض کنید ماتریس دلخواه $S$ را بتوان به صورت $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ افراز کرد که $A$ و $D$ ماتریس‌های مربعی هستند. در این صورت، اگر $A$ معکوسپذیر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = |A||D - CA^{-۱}B|$$

و اگر $D$ معکوسپذیر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = |D||A - BD^{-۱}C|$$

**۱۴.۵.۱ مثال.**

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|c} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ \hline ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} \left| (-۱) - [۰ \;\; ۱] \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right|$$

$$= -۵ \left( -۱ - [۰ \;\; ۱] \begin{bmatrix} -۱/۵ & +۲/۵ \\ +۳/۵ & -۱/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right)$$

$$= -۵ \left( -۱ - [۰ \;\; ۱] \begin{bmatrix} ۳/۵ \\ -۴/۵ \end{bmatrix} \right)$$

$$= -۵ \left( -۱ + \frac{۴}{۵} \right) = ۱$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۲ & -۱ \\ \hline ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۳ & -۲/۳ \\ ۱/۳ & ۱/۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} A۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱/۳ & ۲/۳ \\ ۵/۳ & ۵/۳ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۱/۳ & ۲۳/۳ \\ ۵/۳ & ۵/۳ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left| \begin{bmatrix} -۵/۳ & -۲۰/۳ \\ -۵/۳ & -۲/۳ \end{bmatrix} \right|$$

$$= ۳ \left( \frac{۱۰}{۹} - \frac{۱۰۰}{۹} \right) = -۳۰$$

**۱۵.۵.۱ قضیه.** اگر ماتریس‌های $A$ و $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ معکوسپذیر باشند، آنگاه

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} A^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A^{-۱}B \\ I \end{bmatrix} (D - (A^{-۱}B)^{-۱})[-CA^{-۱} \;\; I]$$

صورت مشابه، اگر $D$ معکوسپذیر باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & D^{-۱} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -D^{-۱}C \end{bmatrix} (A - BC^{-۱}C)^{-۱}[I \;\; - BD^{-۱}]$$

**۱۶.۵.۱ مثال.**

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} (۱)^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(۱)^{-۱}(۲) \\ ۱ \end{bmatrix} \times$$

$$\times \Big( (-۱) - (۱)(۱)^{-۱}(۲) \Big)^{-۱} \big[ -(۱)(۱)^{-۱} \;\; ۱ \big]$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} (-۳)^{-۱} [-۱ \;\; ۱]$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} - \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} [-۱ \;\; ۱]$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} - \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/۳ & ۲/۳ \\ ۱/۳ & -۱/۳ \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ \hline ۴ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]^{-۱} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} & \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} \\ \begin{matrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \end{array}\right]^{-۱}$$

$$+ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right)^{-۱} \times$$

$$\times \left( \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۴ & -۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right)^{-۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۴ & -۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۵/۴ & -۱۱/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ & -۳ \\ ۵/۴ & -۱۱/۴ & -۷/۴ & ۴ \\ ۳/۲ & -۵/۲ & -۱/۲ & ۴ \\ -۵/۴ & ۱۱/۴ & ۷/۴ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ & -۳ \\ ۵/۴ & -۱۱/۴ & -۷/۴ & ۴ \\ ۳/۲ & -۵/۲ & ۱/۲ & ۳ \\ -۵/۴ & ۱۱/۴ & ۷/۴ & -۳ \end{bmatrix}$$

## ۶.۱ دستگاه معادلات خطی

دستگاههای معادلات خطی نقش مهمی را در کاربردهای ریاضیات ایفاء می‌کنند. لذا مطالعهٔ دقیق آنها را به خواننده توصیه می‌کنیم.

**۱.۶.۱ تعریف.** فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، . . . و $x_m$ متغیرند. عبارت

$$a_۱x_۱ + \cdots + a_mx_m = b \qquad (۱.۱)$$

را که $a_۱$، ... $a_m$ و $b$ اعداد ثابت معلومند، **معادلهٔ خطی $m$ متغیره** می‌نامیم. منظور از یک جواب خصوصی این معادله، یک $m$−تایی مرتب $(\alpha_۱,\cdots,\alpha_m)$ از اعداد است که وقتی فرض می‌کنیم $x_۱ = \alpha_۱$ و $\cdots$ و $x_m = \alpha_m$، آنگاه تساوی (۱.۱) برقرار خواهد بود. مجموعهٔ جوابهای خصوصی معادله را **جواب آن معادله** می‌نامیم. گردایه‌ای مرکب از چند معادلهٔ خطی با مجهولات مشترک را یک دستگاه معادلات خطی می‌نامیم؛ دستگاه

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱m}x_m = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲m}x_m = b_۲ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \qquad (۲.۱)$$

را **دستگاه $n$ معادلهٔ $m$ مجهولی** می‌نامیم. منظور از یک **جواب خصوصی** برای دستگاه معادلات (۲.۱)، یک $m$−تایی مرتب $(\alpha_۱,\cdots,\alpha_m)$ است که بطور همزمان جواب هر یک از $n$ معادلهٔ موجود در دستگاه می‌باشد. مجموعه همهٔ جوابهای خصوصی (۲.۱) را **جواب** آن می‌نامیم.

**۲.۶.۱ مثال.** ۱) دستگاه معادلات

$$x - ۲y = -۴, \qquad ۲x + y = ۷$$

را در نظر بگیرید. از معادلهٔ اول نتیجه می‌گردد $x = ۲y - ۴$. اگر در معادلهٔ دوم بجای $x$ این عبارت را قرار بدهیم، به تساوی $۵y - ۸ = ۷$ می‌رسیم. بنابراین $y = ۳$ و $x = ۲$. پس $(۲,۳)$ تنها جواب خصوصی دستگاه است و جواب آن عبارتست از $S = \{(۲,۳)\}$.

**مثال ۲)** دستگاه معادلات

$$۲x - ۳y + z = ۱, \qquad x + ۲y + ۳z = ۲,$$
$$۵x - ۴y + ۵z = ۵$$

را در نظر بگیرید. از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود که $z = ۱ + ۳y - ۲x$. اگر در دو معادلهٔ بعدی بجای $z$ این عبارت را قرار دهید، معادلهٔ دوم به شکل $-۵x + ۱۱y = -۱$ تبدیل می‌شود و معادلهٔ سوم به شکل $-۵x + ۱۱y = ۰$ تبدیل می‌شود. این یک تناقض است، پس دستگاه فاقد جواب خصوصی است. یعنی $S = \emptyset$.

مثال ۳) دستگاه معادلات

$$x - ۳y + ۲z = ۱, \qquad ۶x + y + ۳z = ۲,$$
$$۸x - ۵y + ۷z = ۴$$

را در نظر بگیرید. از معادلهٔ اول نتیجه می‌گردد که $x = ۱ + ۳y - ۲z$. اگر در دو معادلهٔ بعدی بجای $x$ قرار دهیم، معادله دوم به شکل $۱۹y - ۹z = -۴$ تبدیل می‌شود و معادلهٔ سوم نیز به همان معادلهٔ تبدیل می‌گردد. پس دستگاه داده شده با دستگاه زیر معادل است:

$$x = ۱ + ۳y - ۲z, \qquad ۱۹y - ۹z = -۴$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $y = (۹z - ۴)/۱۹$، که اگر آن را در معادلهٔ اول قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x = ۱ + ۳\frac{۹z - ۴}{۱۹} - ۲z = \frac{-۱۱z + ۷}{۱۹}$$

در نتیجه، مجموعهٔ جواب دستگاه عبارت است از

$$S = \left\{\left(\frac{-۱۱z + ۷}{۱۹}, \frac{۹z - ۴}{۱۹}, z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}$$

توجه شود که این دستگاه معادلات، بینهایت جواب خصوصی دارد.

### ۳.۶.۱ شکل ماتریسی یک دستگاه معادلات خطی.

به کمک مفهوم ضرب ماتریسها می‌توان دستگاه معادلات خطی (۲.۱) را به شکل ماتریسی

$$AX = B \qquad (۳.۱)$$

نوشت که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_۱ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$A$ را **ماتریس ضرایب**، $X$ را **ستون مجهولات** و $B$ را **ستون معلومات** یا **طرف ثانی دستگاه** می‌نامیم. ماتریس حاصل از الحاق ستون $B$ به ماتریس $A$ را **ماتریس اضافی دستگاه** (۳.۱) نامیده و با نماد $A|B$ نشان می‌دهیم.

**۴.۶.۱ روش حذف گاوس.** فلسفهٔ این روش چنین است: ابتدا یک متغیر را از معادلهٔ اول بر حسب سایر متغیرها بدست آورده و سپس در معادلات بعدی قرار می‌دهیم. اکنون معادلات باقیمانده دارای یک متغیر کمتر و نیز یک معادله کمتر می‌باشد. با ادامهٔ این کار، رفته رفته دستگاه ساده‌تر می‌شود. اگر این روند به تناقض نیانجامد، دستگاه آخر را حل کرده، جواب را در معادلهٔ قبلی قرار می‌دهیم، سپس جواب بدست آمده را در معادلهٔ قبل از آن قرار می‌دهیم و الی آخر.

برای ساده‌تر کردن بکارگیری این روش، از فرم ماتریسی دستگاه و الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

**اعمال سطری مقدماتی** عبارتند از:

الف) تعویض دو سطر با هم.

ب) ضرب کردن یک سطر در عددی مخالف صفر.

ج) اضافه کردن مضربی از یک سطر به سطری دیگر.

فرض کنیم $A|B$ ماتریس اضافی نظیر به دستگاه (۳.۱) و لذا دستگاه (۲.۱) باشد. اکنون مجاز به تعدادی متناهی مرحله از سه عمل بالا استفاده کنیم تا دستگاه $A|B$ به شکل بالا مثلثی تبدیل گردد. یعنی عناصر زیر قطر اصلی آن همگی صفر شوند. در مرحلهٔ آخر مجدداً از روی ماتریس اضافی حاصل، دستگاه را بازسازی نموده، و دستگاه سادهٔ حاصل را حل می‌کنیم.

**۵.٦.۱ مثال.** ۱) دستگاه معادلات

$$x-2y+3z=2,\qquad 2x+y-2z=6,$$
$$-3x+5y+z=2.$$

را در نظر بگیرید. ماتریس ضرایب، ستون مجهولات، ستون معلومات و ماتریس اضافهٔ آن به ترتیب عبارتند از

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&1&-2\\-3&5&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$
$$B=\begin{bmatrix}2\\6\\2\end{bmatrix},\quad A|B=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\2&1&-2&6\\-3&5&1&2\end{array}\right]$$

. حال به روش زیر عمل می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\2&1&-2&6\\-3&5&1&2\end{array}\right]\overset{(1)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&5&-8&2\\0&-1&10&8\end{array}\right]$$
$$\overset{(2)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&-1&10&8\\0&5&-8&2\end{array}\right]\overset{(3)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&1&-10&-8\\0&5&-8&2\end{array}\right]$$
$$\overset{(4)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&1&-10&-8\\0&0&42&42\end{array}\right]\overset{(5)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&2\\0&1&-10&-8\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

توضیح این که در (۱) دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم کرده‌ایم و سه برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه کرده‌ایم. در (۲) جای سطر دوم و سطر سوم را عوض کرده‌ایم. در (۳) سطر دوم را در ۱− ضرب نموده‌ایم. در (۴) پنج برابر سطر دوم را از سطر سوم کم نموده‌ایم. در (۵) سطر سوم را در ۱/۴۲ ضرب نموده‌ایم. دستگاه نظیر به ماتریس آخر عبارتست از

$$x-2y+3z=2,\quad y-10z=-8,\quad z=1$$

بنابراین $z=1$، $y=10z-8=2$ و $x=2y-3z+2=3$. یعنی جواب دستگاه عبارت است از $S=\{(3,2,1)\}$.

**مثال ۲)** دستگاه معادلات

$$x-2y+3z=1,\qquad 2x+5y-2z=3,$$
$$4x+y+4z=5$$

را در نظر بگیرید. ماتریس اضافی نظیر به آن عبارتست از

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\2&5&-2&3\\4&1&4&5\end{array}\right]$$

حال به روش زیر عمل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\2&5&-2&3\\4&1&4&5\end{array}\right]\overset{(1)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\0&9&-8&1\\0&9&-8&1\end{array}\right]$$
$$\overset{(2)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&1\\0&9&-8&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

توضیح این که، در (۱) دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم نموده‌ایم و چهار برابر سطر اول را از سطر سوم کم نموده‌ایم. در (۲) سطر دوم را از سطر سوم کم نموده‌ایم. دستگاه نظیر به ماتریس آخر عبارتست از

$$x-2y+3z=1,\qquad 9y-8z=1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}x&=2y-3z+1=\frac{1}{9}(-11z+11)\\ y&=\frac{1}{9}(8z+1)\end{aligned}$$

پس جواب عمومی دستگاه عبارت است از

$$S=\left\{\left(\frac{11}{9}(1-z),\frac{1}{9}(8z+1),z\right)\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

**مثال ۳)** دستگاه معادلات

$$2x+y-3z=3,\qquad -x+2y+2z=2,$$
$$3x+4y-4z=10$$

را در نظر بگیرید. ماتریس اضافی نظیر به آن دستگاه است از

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&3\\-1&2&2&2\\3&4&-4&10\end{array}\right]$$

حال به روش زیر عمل می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&3\\-1&2&2&2\\3&4&-4&10\end{array}\right]\overset{(1)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&2\\2&1&-3&3\\3&4&-4&10\end{array}\right]$$
$$\overset{(2)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&2\\0&5&1&7\\0&10&2&16\end{array}\right]\overset{(3)}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&2\\0&5&1&7\\0&0&0&2\end{array}\right]$$

توضیح این که، در (۱) سطر اول و دوم را عوض نموده‌ایم. در (۲) دو برابر سطر اول را به سطر دوم اضافه کرده‌ایم و سه برابر سطر اول را به سطر سوم. در (۳) دو برابر سطر دوم را از سطر سوم کم نموده‌ایم.

دستگاه نظیر به ماتریس آخر عبارتست از

$$-x+۲y+۲z=۲,\qquad ۵y+z=۷,\qquad ۰=۲$$

که معادلهٔ آخر تناقض است. پس دستگاه جواب ندارد $S=\emptyset$.

**۶.۶.۱ تمرین.** هر یک از دستگاههای زیر را به روش گاوس حل کنید

$$۱)\ \begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۵x+y=۲ \end{cases} \qquad ۲)\ \begin{cases} x-۳y+۲z=۱ \\ ۲x-y+z=۲ \end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases} ۳x+۲y+۵z=۱ \\ ۴x-۵y-۸z=۲ \\ ۷x+۲y+۹z=-۱ \end{cases} \quad ۴)\ \begin{cases} x-۳y+۵z=۱ \\ ۲x+۲y-۲z=۲ \\ ۵x-۷y+۱۳z=۱۰ \end{cases}$$

$$۵)\ \begin{cases} ۲x+y-۵z+t=۸ \\ x-۳y-۶t=۹ \end{cases} \quad ۶)\ \begin{cases} ۲y-z+۲t=-۵ \\ x+۴y-۷z+۶t=۰ \\ x-y+z-t=۱ \end{cases}$$

آیا بدون حل دستگاه می‌توان در وجود و یا عدم وجود جواب آن دستگاه بحث کرد؟ پاسخ این پرسش در گرو دانستن مفهوم رتبه است.

**۷.۶.۱ تعریف.** فرض کنید $A$ یک ماتریس $m\times n$ است و $۱\le k\le \min\{m,n\}$. منظور از یک **زیر ماتریس** $k\times k$ از $A$، ماتریسی است که از محل برخورد $k$ ستون و $k$ سطر از ماتریس $A$ حاصل می‌شود.

اگر دترمینان یک زیر ماتریس $k\times k$ از $A$ مخالف صفر باشد و دترمینان کلیهٔ زیر ماتریسهای $(k+۱)\times(k+۱)$ از $A$ صفر باشند، آنگاه گفته می‌شود که **رتبهٔ** $A$ برابر $k$ است و نوشته می‌شود $\operatorname{rank}(A)=k$.

**۸.۶.۱ قضیه.** شرط لازم و کافی برای این که دستگاه (۲.۱) جواب داشته باشد، آن است که رتبهٔ ماتریس ضرایب آن $A$ با رتبهٔ ماتریس اضافه‌اش $A|B$ برابر باشد. تعداد متغیرهای مستقل موجود در جواب برابر $m-\operatorname{rank}(A)$ است.

**۹.۶.۱ مثال.** ۱) دستگاه معادلات

$$x-۲y+۳z=۲,\qquad ۲x+y+۴z=۲,$$
$$۶x+۲y-۵z=۱$$

را در نظر بگیرید. در این صورت ماتریس ضرایب و ماتریس اضافی این دستگاه معادلات به ترتیب برابرند با

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۶ & ۲ & -۵ \end{bmatrix},\quad A|B=\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۲ \\ ۶ & ۲ & -۵ & ۲ \end{array}\right].$$

رتبهٔ هر دو برابر سه است، زیرا

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۵ & -۲ \\ ۶ & ۱۴ & -۲۳ \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱۴ & -۲۳ \end{vmatrix} = -۸۷\neq ۰ \end{aligned}$$

پس دستگاه جواب دارد. چون $m-\operatorname{rank}(A)=۳-۳=۰$، بنابراین دستگاه تنها یک جواب خصوصی دارد.

**مثال ۲)** دستگاه معادلات

$$۲x-۳y+۴z=۲,\qquad ۵x+۲y-۳z=۲,$$
$$۱۲x+y-۲z=۵$$

را در نظر بگیرید. ماتریس ضرایب و ماتریس اضافهٔ آن برابرند با

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & -۳ \\ ۱۲ & ۱ & -۲ \end{bmatrix},\quad A|B=\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۳ & ۴ & ۲ \\ ۵ & ۲ & -۳ & ۲ \\ ۱۲ & ۱ & -۲ & ۵ \end{array}\right].$$

رتبهٔ $A$ سه نیست، زیرا

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۱۲ & -۱۳ \\ ۱۲ & ۲۵ & -۲۶ \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱۹ & ۱۲ & -۱۳ \\ -۳۸ & ۲۵ & -۲۶ \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -۱۹ & -۱۳ \\ -۳۸ & -۲۶ \end{vmatrix} = ۰ \end{aligned}$$

اما دترمینان ماتریس حاصل از دو سطر اول و دو ستون اول آن برابر است با

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix} = ۴+۱۵=۱۹\neq ۰$$

پس رتبهٔ $A$ برابر دو است. در حالی که رتبهٔ $A|B$ برابر سه است، زیرا دترمینان ماتریس حاصل از سه سطر ماتریس $A|B$ و سه ستون آخر آن مخالف صفر است

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۵ \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۶ & -۷ & ۲ \\ ۱۱ & -۱۲ & ۵ \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۶ & -۷ & -۱۰ \\ -۱۱ & -۱۲ & -۱۷ \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -۷ & -۱۰ \\ -۱۲ & -۱۷ \end{vmatrix} = -۱\neq ۰ \end{aligned}$$

پس مطابق قضیهٔ ۸.۶.۱، دستگاه مورد نظر فاقد جواب است.

**مثال ۳)** دستگاه معادلات

$$x+2y+2z+t=2, \qquad y+z+t=1,$$
$$x+y+z=1$$

را در نظر بگیرید. در این صورت رتبهٔ ماتریس ضرایب و ماتریس اضافی این دستگاه معادلات برابر ۲ است. پس، دستگاه دارای جواب است و تعداد متغیرهای مستقل در جواب آن $m-\operatorname{rank}(A)=4-2=2$ می‌باشد. در واقع

$$S=\{(x,y,1-x-y,0)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$$

### ۱۰.۶.۱ تمرین.

در هر مورد بدون حل دستگاه، در وجود و یا عدم وجود جواب آن بحث کنید

$$1)\ \begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+3y=4 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x-3y=2 \\ -2x+3y=-2 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ 4x-y+5z=0 \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} 2x-y+3z+4t=1 \\ y-z+2t=2 \\ 2x+2z+6t=-1 \end{cases}$$

### ۱۱.۶.۱ روش کرامر.

اگر در دستگاه (۱.۲) تعداد معادلات و مجهولات برابر باشد ($m=n$) و دترمینان ماتریس ضرایب آن نیز مخالف صفر باشد، آنگاه $x_i=|A_i|/|A|$. که $A_i$ عبارت است از ماتریس حاصل از تعویض ستون $i$ ام ماتریس $A$ با ستون معلومات $B$.

### ۱۲.۶.۱ مثال.

۱) دستگاه معادلات

$$2x-3y+3z=8, \qquad 3x+2y-2z=-1,$$
$$3x-y+2z=7$$

را در نظر بگیرید. در این صورت، $S=\{(1,0,2)\}$. زیرا

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=13\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 8 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}=13, \quad x=x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=1$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad y=x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=0$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}=26, \quad z=x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=2$$

**مثال ۲)** دستگاه معادلات

$$2x+y-5z+t=8, \qquad x-3y-6t=9,$$
$$2y-z+2t=-5, \qquad x+4y-7z+6t=0$$

را در نظر بگیرید. در این صورت، $S=\left\{(3,-4,-1,1)\right\}$. چرا که بر اساس روش کرامر

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,$$

$$|A_4|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27,$$

$$x=x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=3 \qquad y=x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=-4$$

$$z=x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=-1 \qquad t=x_4=\frac{|A_4|}{|A|}=1$$

**مثال ۳)** (اگر دستگاه مربعی نباشد) دستگاه معادلات

$$x-3y+2z=4, \qquad 2x+5y-4z=2$$

را در نظر بگیرید. فرض کنیم $z$ معلوم است، پس می‌توان نوشت

$$x-3y=4-2z, \qquad 2x+5y=2+4z$$

در نتیجه،

$$S=\left\{\left(\frac{2}{11}(z+13),\frac{2}{11}(4z-3),z\right)\middle|\,z\in\mathbb{R}\right\}$$

زیرا

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=11\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 4-2z & -3 \\ 2+4z & 5 \end{vmatrix}=2z+26,$$

$$x=x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{2z+26}{11}$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 4-2z \\ 2 & 2+4z \end{vmatrix}=8z-6,$$

$$y = x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{8z-6}{11}$$

**مثال ۴)** (اگر دترمینان دستگاه صفر باشد) دستگاه معادلات

$$x-2y+3z=5, \qquad 2x+y+2z=2,$$
$$7x-4y+13z=19$$

را در نظر بگیرید. دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه صفر است. موقتاً معادلهٔ سوم را به کنار گذاشته و دستگاه حاصل از دو معادلهٔ اول را حل می‌کنیم:

$$x-2y=5-3z, \qquad 2x+y=2-2z$$

که کاملاً شبیه به مثال (۱) است. بنابراین

$$x=x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{9-7z}{5} \qquad y=x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{4z-8}{5}$$

حال باید $x$ و $y$ را در معادلهٔ سوم قرار داد و صحت پاسخ بدست آمده را تحقیق نمود

$$7x-4y+13z=7\frac{9-7z}{5}-4\frac{4z-8}{5}+13z=19$$

بنابراین

$$S=\left\{\left(\frac{1}{5}(9-7z),\frac{4}{5}(z-2),z\right)\Big|\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

اگر چنانچه تساوی آخر برقرار نمی‌شد، جواب $\varnothing$ بود.

**۱۳.۶.۱ تمرین.** هر یک از دستگاههای زیر را به روش کرامر حل کنید

$$1)\ \begin{cases} x-3y=-5 \\ 3x+2y=12 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 6x+y=-4 \\ x+6y=11 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=1 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ x+4y-2z=2 \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+2y-z-t=0 \\ 3x-y-z+2t=0 \\ x+3y+z-2t=1 \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} -x+y+z+t=8 \\ x-y+z+t=6 \\ x+y-z+t=4 \\ x+y+z-t=5 \end{cases}$$

## ۷.۱ مقدار و بردار ویژه

**۱.۷.۱ تعریف.** فرض کنید $A$ ماتریس $n\times n$ ای است. اگر بردار ستونی $\mathbf{v}\in \mathrm{Mat}\,(n\times 1)$ و عدد حقیقی $\lambda$ طوری یافت گردند که $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$، آنگاه $\lambda$ را یک **مقدار ویژهٔ ماتریس** $A$ و $\mathbf{v}$ را یک **بردار ویژهٔ** نظیر به $\lambda$ برای $A$ می‌نامیم. اغلب بردارهای $\mathbf{v}$ مخالف صفر مورد توجه است، زیرا بردار صفر بطور طبیعی در معادلهٔ $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ به ازای هر $\lambda$ ای صدق دارد.

**۲.۷.۱ قضیهٔ هامیلتن.** عدد $\lambda\in\mathbb{R}$ وقتی و تنها وقتی یک مقدار ویژهٔ ماتریس مربعی $A\in\mathrm{Mat}\,(n\times n)$ است که $p(\lambda)=|\lambda I_n-A|=0$. این معادله را **معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس** $A$ و چند جمله‌ای مرتبهٔ $n$ ام $p(\lambda)$ را **چند جمله‌ای مشخصهٔ** $A$ می‌نامیم.

**۳.۷.۱ مثال.** ۱) فرض کنید $A=\begin{bmatrix}3&1\\4&3\end{bmatrix}$. در این صورت، معادلهٔ مشخصهٔ $A$ عبارتست از

$$0=|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2-4$$

پس $(\lambda-3)^2=4$، $\lambda-3=\pm 2$ و $\lambda=3\pm 2$. یعنی $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=5$ مقادیر ویژهٔ $A$ هستند. بعلاوه، در مورد مقدار ویژهٔ $\lambda_1$ داریم

$$A\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}3&1\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\; \begin{cases}3x+y=x\\4x+3y=y\end{cases}$$

پس $2x+y=0$ و لذا $y=-2x$. یعنی، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_1=1$ برابر است با

$$\left\{\begin{bmatrix}x\\-2x\end{bmatrix}\Big|\, x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

در مورد مقدار ویژهٔ $\lambda_2$ نیز، داریم

$$A\mathbf{v}=5\mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix}3&1\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\; \begin{cases}3x+y=5x\\4x+3y=5y\end{cases}$$

بنابراین $y=2x$. یعنی، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_2=5$ عبارتست از

$$\left\{\begin{bmatrix}x\\2x\end{bmatrix}\Big|\, x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

**مثال ۲)** فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&-2\\-5&3&8\end{bmatrix}$. در این صورت، معادلهٔ مشخصهٔ $A$ عبارت است از

$$0=|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-3&2\\5&-3&\lambda-8\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)$$

یعنی، مقادیر ویژهٔ $A$ عبارتند از $\lambda_1 = 3$، $\lambda_2 = 4$ و $\lambda_3 = 5$. در مورد مقدار ویژهٔ $\lambda_1 = 3$، داریم

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{v} = 3\mathbf{v} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ -5x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x = y + z \\ z = x \\ 3y + 5z = 5x \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

یعنی، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_1 = 3$ از ماتریس $A$ عبارتند از

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

به صورت مشابه، مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_2 = 4$ و $\lambda_3 = 5$ از ماتریس $A$، به ترتیب برابرند با

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{و} \qquad \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

**مثال ۳)** فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. در این صورت، معادلهٔ مشخصهٔ $A$ عبارت است از $\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$ اشت که دارای ریشهٔ حقیقی $\lambda_1 = -1$ و ریشه‌های مختلط مزدوج $\lambda_2 = 1 + 2i$ و $\lambda_3 = 1 - 2i$ است. مجموعه‌های متشکل از بردارهای ویژهٔ نظیر به آنها بترتیب برابرند با

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} \right\}, \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

**۴.۷.۱ قضیه.** حاصلضرب همهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس، برابر دترمینان آن ماتریس است.

مجموع همهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریسس، برابر اثر دترمینان آن ماتریس است، یعنی برابر مجموع عناصر قطر اصلی آن ماتریس.

**۵.۷.۱ قضیه.** تعداد بردارهای ویژهٔ مستقل خطی نظیر به هر مقدار ویژه، حد اکثر برابر شمارهٔ تکرار آن مقدار ویژه در معادلهٔ مشخصه است.

بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت، مستقل خطی هستند.

**۶.۷.۱ قضیه.** شرط لازم و کافی برای این که ماتریس $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ قطری شدنی باشد آن است که $A$ دارای $n$ بردار ویژهٔ مستقل خطی باشد بعلاوه اگر ماتریس $A$ دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_1$، $\lambda_2$، ... و $\lambda_n$ (احتمالاً با تکرار) بوده و $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ... و $\mathbf{v}_n$ بردارهای ویژهٔ ستونی نظیر به آنها باشند و $C$ ماتریس حاصل از کنار هم قرار دادن ستونهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ... و $\mathbf{v}_n$ باشد، در این صورت $C^{-1}AC$ قطری است و

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**۷.۷.۱ مثال.** ۱) ادامهٔ مثال (۱) از ۲.۷.۱ در این حالت

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

**مثال ۲)** (ادامهٔ مثال (۲) از ۲.۷.۱) در این حالت

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

**مثال ۳ )** فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. در این صورت $A$ دارای معادلهٔ مشخصهٔ $-(\lambda + 1)^3 = 0$ است و در نتیجه تنها یک مقدار ویژهٔ $\lambda = -1$ با تکرار سه دارد. فرض $AX = -X$ به دستگاه معادلات

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

منتهی می‌شود که تنها جواب مستقل خطی آن $\mathbf{v} = (1, 1, -1)^t$ است. بنابراین، ماتریس $A$ قطری شدنی نیست.

**۸.۷.۱ تمرین.** تمام مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ هر یک از ماتریس‌های زیر را بدست آورده و در صورت امکان، شکل قطری آنرا بدست آورید.

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۵ \end{bmatrix} \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} ۵ & -۲ & ۸ \\ -۴ & ۰ & -۵ \\ -۴ & ۲ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$۵)\ \begin{bmatrix} -۱ & -۴ & -۲ \\ -۲ & -۳ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۵ \end{bmatrix} \qquad ۶)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۷) مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و فرم قطری ماتریس بالا مثلثی $\begin{bmatrix} a & b & d \\ ۰ & c & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

**۹.۷.۱ قضیه.** فرض کنید $A$ یک ماتریس $n \times n$ است و $P(x) = |xI_n - A|$. در این صورت $p(A) = O$.

**۱۰.۷.۱ مثال.** ۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، در این صورت

$$\begin{aligned} p(x) &= \left| x \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-۱ & ۰ \\ -۳ & x+۱ \end{vmatrix} \\ &= x^۲ - ۱ \end{aligned}$$

در نتیجه $A^۲ = I$ و بنابراین به ازای هر $n \geq ۱$ای $A^{۲n} = I$ و $A^{۲n+۱} = A$.

**مثال ۲)** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$، آنگاه

$$\begin{aligned} p(x) &= \left| x \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-۱ & -۲ \\ ۱ & x-۳ \end{vmatrix} \\ &= x^۲ - ۴x + ۵ \end{aligned}$$

در نتیجه $A^۲ - ۴A + ۵I_۲ = O$، یا $A^۲ = ۴A - ۵I_۲$.

**مثال ۳)** اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، با فرض $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ داریم $B^{-۱}AB = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} A^n &= \left( B \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} B^{-۱} \right)^n \\ &= B \begin{bmatrix} ۴^n & ۰ \\ ۰ & ۲^n \end{bmatrix} B^{-۱} \\ &= ۲^{n-۱} \begin{bmatrix} ۲^n + ۱ & ۲^n - ۱ \\ ۲^n - ۱ & ۲^n + ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**۱۱.۷.۱ تمرین.** مقدار هر یک از ماتریسهای زیر را محاسبه کنید:

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}^n \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}^n$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۳ \\ ۲ & ۳ & -۲ \\ ۴ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}^n \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}^n$$

## ۸.۱ ماتریسهای متعامد و متقارن

**۱.۸.۱ تعریف.** فرض کنید $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}\,(m \times n)$. **ترانهاد ماتریس** $A$ به صورت $A^t = [a_{ji}]$ تعریف می‌شود که عضوی از $\mathrm{Mat}\,(m \times n)$ است و از تعویض مکان عناصر $a_{ij}$ و $a_{ji}$ حاصل می‌گردد. در این صورت، روشن است که $(A^t)^t = A$. ماتریس $A$ را در صورتی متعامد گوئیم که $AA^t = I$. یعنی معکوس آن برابر ترانهادش باشد.

**۲.۸.۱ مثال.** ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} A^{-۱} &= \begin{bmatrix} ۳/۵ & ۴/۵ \\ -۴/۵ & ۳/۵ \end{bmatrix}^{-۱} \\ &= \begin{bmatrix} ۳/۵ & -۴/۵ \\ ۴/۵ & ۳/۵ \end{bmatrix} = A^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-۱} &= \begin{bmatrix} ۲/۳ & ۲/۳ & ۱/۳ \\ ۲/۳ & -۱/۳ & -۲/۳ \\ ۱/۳ & -۲/۳ & ۲/۳ \end{bmatrix}^{-۱} \\ &= \begin{bmatrix} ۲/۳ & ۲/۳ & ۱/۳ \\ ۲/۳ & -۱/۳ & -۲/۳ \\ ۱/۳ & -۲/۳ & ۲/۳ \end{bmatrix} = A^t = A \end{aligned}$$

**۳.۸.۱ قضیه.** اگر $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}\,(n \times n)$، آنگاه شرط لازم و کافی برای این که $A$ متعامد باشد آن است که

الف) به ازای هر $۱ \leq j \leq n$، $a_{۱j}^۲ + a_{۲j}^۲ + \cdots + a_{nj}^۲ = ۱$.

ب) به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $a_{i۱}^۲ + a_{i۲}^۲ + \cdots + a_{in}^۲ = ۱$.

ج) به ازای هر $۱ \leq i \neq j \leq n$، $a_{۱i}a_{j۱} + \cdots + a_{ni}a_{jn} = ۰$.

د) به ازای هر $۱ \leq i \neq j \leq n$، $a_{i۱}a_{۱j} + \cdots + a_{in}a_{nj} = ۰$.

**۴.۸.۱ تعریف.** ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}\,(n \times n)$ را در صورتی **متقارن** گوئیم که با ترانهادش برابر باشد، یعنی به ازاء هر $i$ و هر $j$ای $a_{ij} = a_{ji}$.

**۵.۸.۱ قضیه.** هر ماتریس متقارن $n \times n$ ای دارای $n$ مقدار ویژهٔ حقیقی (با احتساب تکرار) و $n$ بردار ویژهٔ مستقل خطی است و بنابراین قطری شدنی است. بعلاوه، بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت، متعامدند.

**۱.۸.۶ نتیجه.** اگر $A \in \mathrm{Mat}\,(n \times n)$ یک ماتریس متقارن با مقدارهای ویژهٔ $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ... و $\lambda_n$ و بردارهای ویژهٔ یکهٔ $\mathbf{v}_۱$، $\mathbf{v}_۲$، ... و $\mathbf{v}_n$ بوده و ماتریس حاصل از کنار هم قرار دادن $v_i$ ها را $C = [\mathbf{v}_۱ \mathbf{v}_۲ \cdots \mathbf{v}_n]$ بنامیم، آنگاه

$$C^{-۱}AC = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بنابراین، اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ $A$ متمایز باشند، و در $C$ از بردارهای یکه استفاده کنیم، آنگاه ماتریس $C$ متعامد خواهد بود.

**۱.۸.۷ مثال.** ۱) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس متقارن است و معادلهٔ مشخصهٔ آن $\lambda^۲ - ۲\lambda = ۰$ است. پس مقادیر ویژهٔ آن $\lambda_۱ = ۰$ و $\lambda_۲ = ۲$ هستند. بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_۱ = ۰$ و $\lambda_۲ = ۲$ بترتیب برابرند با $\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$ و $\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\right\}$. پس می‌توانیم فرض کنیم

$$\mathbf{v}_۱ = \begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_۲ = \begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۲ \\ -\sqrt{۲}/۲ \end{bmatrix},$$

$$C = [\ \mathbf{v}_۱ \quad \mathbf{v}_۲\ ] = \begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۲ & \sqrt{۲}/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ & -\sqrt{۲}/۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت چون مقادیر ویژهٔ $A$ متمایزند، $C^t = C^{-۱}$ و در نتیجه

$$C^{-۱}AC = C^tAC = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

**مثال ۲)** ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس متقارن است و معادلهٔ مشخصهٔ آن

$$\lambda\left(\lambda^۲ - ۲\right) = ۰$$

می‌باشد. پس مقادیر ویژهٔ $A$ برابرند با $\lambda_۱ = ۰$، $\lambda_۲ = -\sqrt{۲}$ و $\lambda_۳ = \sqrt{۲}$. بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ به ترتیب

$$\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}, \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲} \\ -۱ \end{bmatrix}\right\}, \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ -\sqrt{۲} \\ -۱ \end{bmatrix}\right\}$$

می‌باشند. پس می‌توان فرض کرد

$$\mathbf{v}_۱ = \begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۲ \\ ۰ \\ \sqrt{۲}/۲ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_۲ = \begin{bmatrix} ۱/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ \\ -۱/۲ \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_۳ = \begin{bmatrix} ۱/۲ \\ -\sqrt{۲}/۲ \\ -۱/۲ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۲ & ۱/۲ & ۱/۲ \\ ۰ & \sqrt{۲}/۲ & -\sqrt{۲}/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ & -۱/۲ & -۱/۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت $C^{-۱} = C^t$ و بنابراین

$$C^{-۱}AC = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

**مثال ۳)** فرض کنید $\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۳ \\ ۳ & -۵ & ۳ \\ ٦ & -٦ & ۴ \end{bmatrix}$. در این صورت معادلهٔ مشخصهٔ $A$ عبارت است از

$$(\lambda + ۲)^۲(\lambda - ۴) = ۰$$

فضای بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = ۲$ عبارت است از $\mathrm{span}\left\{(۱,۱,۰)^t, (۱,۰,-۱)^t\right\}$ و فضای بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = ۴$ عبارت است از $\mathrm{span}\left\{(۱,۱,۲)^t\right\}$. بنابراین

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}, \quad C^{-۱}AC = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

توجه شود که در این حالت $C^{-۱} \neq C^t$.

**مثال ۴)** فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $n \in \mathbb{N}$. مقدار $A^n$ را بدست آورید.

حل. برای این منظور ابتدا $A$ را قطری می‌کنیم. معادلهٔ مشخصهٔ آن $\lambda^۲ - ۲\lambda - ۳ = ۰$ و مقادیر ویژهٔ آن $\lambda_۱ = -۱$ و $\lambda_۲ = ۳$ هستند. بردارهای ویژهٔ مستقل خطی نظیر به $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ بترتیب عبارتند از $\mathbf{v}_۱ = (۱,۱)^t$ و $\mathbf{v}_۲ = (۱,-۱)^t$. با کنار هم قرار دادن بردارهای $\mathbf{v}_۱/\|\mathbf{v}_۱\|$ و $\mathbf{v}_۲/\|\mathbf{v}_۲\|$ به ماتریس $C = \begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۲ & \sqrt{۲}/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ & -\sqrt{۲}/۲ \end{bmatrix}$ می‌رسیم. بنابراین

$$C^tAC = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

یا $A = C\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}C^t$. در نتیجه

$$\begin{aligned} A^n &= \left(C\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}C^t\right)^n \\ &= C\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}^n C^t \\ &= C\begin{bmatrix} (-۱)^n + ۳^n & (-۱)^n - ۳^n \\ (-۱)^n - ۳^n & (-۱)^n + ۳^n \end{bmatrix} C^t \\ &= (-۱)^n \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + ۳^n \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**۱.۸.۸ تمرین.** نشان دهید که هر یک از ماتریسهای متقارن زیر با یک ماتریس قطری هم ارز است:

$$۱)\ \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad ۲)\ \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$۳)\ \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad ۴)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵) نشان دهید که اگر $A \in \mathrm{Mat}\,(n \times n)$ دلخواه باشد، آنگاه $M = \frac{۱}{۲}\left(A + A^t\right)$ یک ماتریس متقارن است.

۶) آیا حاصلضرب دو ماتریس متقارن، متقارن است؟ چرا؟

۷) آیا حاصلضرب دو ماتریس متعامد، متقارن است؟ چرا؟

۸) چنانچه $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $A^n$ را به ازای هر $n$ ای محاسبه کنید.

۹) ثابت کنید که اگر $AA^t = O$، آنگاه $A = O$.

## ۱.۹ تبدیل خطی

توابع بین فضاهای برداری که حافظ خاصیت خطی بودن هستند، خطی نامیده می‌شوند. یعنی

**۱.۹.۱ تعریف.** نگاشت $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را در صورتی خطی گوئیم که به ازای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ و هر $a \in \mathbb{R}$ ای

$$F\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}\right) = F\left(\mathbf{u}\right) + F\left(\mathbf{v}\right) \quad \text{و} \quad F\left(a\mathbf{u}\right) = aF\left(\mathbf{u}\right)$$

معمولاً بجای $f(\overrightarrow{(x,y,z)})$ می‌نویسیم $f(x,y,z)$.

**۲.۹.۱ مثال.** ۱) نگاشت

$$F\left(x,y\right) = \overrightarrow{\left(۲x, x-y, y-x\right)}$$

از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}^۳$ خطی است. زیرا

$$\begin{aligned} F\left(a\left(x,y\right)\right) &= F\left(ax, ay\right) \\ &= \overrightarrow{\left(۲ax, ax-ay, ay-ax\right)} \\ &= \overrightarrow{\left(۲x, x-y, y-x\right)} \\ &= aF(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(\left(x,y\right)+\left(s,t\right)\right) &= F\left(x+s, y+t\right) \\ &= \overrightarrow{\left(۲x+۲s, x+s-y-t, y+t-x-s\right)} \\ &= \overrightarrow{\left(۲x, x-y, y-x\right)} + \overrightarrow{\left(۲s, s-t, t-s\right)} \\ &= F\left(x,y\right) + F\left(s,t\right) \end{aligned}$$

**مثال ۲)** نگاشت $F\left(x,y,z\right) = x - ۲y + z$ از $\mathbb{R}^۳$ به $\mathbb{R}$ خطی است. زیرا

$$\begin{aligned} F\left(a\left(x,y,z\right)\right) &= F\left(ax, ay, az\right) \\ &= ax - ۲ay + az \\ &= a\left(x - ۲y + z\right) \\ &= aF\left(x,y\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(\left(x,y,z\right)+\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\right) &= F\left(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma\right) \\ &= x+\alpha-۲y-۲\beta+z+\gamma \\ &= \left(x-۲y+z\right)+\left(\alpha-۲\beta+\gamma\right) \\ &= F\left(x,y,z\right)+F\left(\alpha,\beta,\gamma\right) \end{aligned}$$

**۳.۹.۱ قضیه.** اگر $F$ و $G$ نگاشتهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ و $H$ نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^l$ باشد و $a \in \mathbb{R}$، در این صورت $a\mathbf{F}$، $F+G$ و $H \circ F$ نگاشت خطی‌اند. بعلاوه، معکوس هر تبدیل خطی معکوسپذیر، یک تبدیل خطی معکوسپذیر است و $(A^{-۱})^{-۱} = A$.

**۴.۹.۱ تعریف.** فرض کنید $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ برداری است که مختص $i$ ام آن یک و سایر مختصات آن صفرند و بعلاوه $\mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^m$ برداری است که مختص $i$ ام آن یک و سایر مختصاتش صفر باشند.

فرض کنید $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی است و به ازای هر $۱ \le j \le n$ داشته باشیم

$$F\left(\mathbf{e}_i\right) = a_{۱j}\mathbf{E}_۱ + a_{۲j}\mathbf{E}_۲ + \cdots + a_{mj}\mathbf{E}_m$$

در این صورت ماتریس $A = [a_{ij}]$ را **ماتریس نمایش تبدیل خطی $\mathbf{F}$** می‌نامیم و با نماد $M\left(\mathbf{F}\right)$ نشان می‌دهیم. بنابراین، اگر بردارها به شکل ستونی نوشته شوند، آنگاه به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ای

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad F\left(\mathbf{v}\right) = M\left(F\right)\mathbf{v}$$

**۵.۹.۱ قضیه.** تناظری یکبیک بین نگاشتهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ و مجموعهٔ ماتریسهای $m \times n$ وجود دارد.

**۶.۹.۱ قضیه.** اگر $F$ و $G$ نگاشتهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$، $H$ نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^l$ و $J$ نگاشتی خطی و معکوسپذیر از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ باشد و $a \in \mathbb{R}$، در این صورت

۱) $M\left(aF\right) = aM\left(F\right)$

۲) $M\left(F+G\right) = M\left(F\right) + M\left(G\right)$

۳) $M\left(H \circ F\right) = M\left(H\right)M\left(F\right)$

۴) $M\left(J^{-۱}\right) = M\left(J\right)^{-۱}$

**۷.۹.۱ مثال.** فرض کنید $a = ۳$ و

$$F\left(x,y\right) = \overrightarrow{\left(۲x-y, x+y, x+۳y\right)}$$

$$G\left(x,y\right) = \overrightarrow{\left(۲x, x+y, ۲x+۳y\right)}$$

$$H\left(x,y,z\right) = \overrightarrow{\left(x-y+z, ۲x+y-۲z\right)}$$

$$J\left(x,y\right) = \overrightarrow{\left(x-y, ۲x+y\right)}$$

می‌خواهیم قضیهٔ ۶.۹.۱ را در این حالت تحقیق کنیم:

۱) چون (به شکل بردارهای ستونی)

$$F\left(\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲\\۱\\۱\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad F\left(\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-۱\\۱\\۳\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس نمایش $F$ عبارتست از

$$M(F)=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

به صورت مشابه

$$G\left(\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲\\۱\\۲\end{bmatrix},\quad G\left(\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۰\\۱\\۳\end{bmatrix},$$

$$M(G)=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix},\quad H\left(\begin{bmatrix}۱\\۰\\۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix},$$

$$H\left(\begin{bmatrix}۰\\۱\\۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix},\quad H\left(\begin{bmatrix}۰\\۰\\۱\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix},$$

$$M(H)=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۲\end{bmatrix}, J\left(\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix},$$

$$J\left(\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix},\quad M(J)=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}.$$

۲) برای تحقیق قسمت ۱) از قضیهٔ ۶.۹.۱، داریم

$$\begin{aligned}(aF)(x,y) &= aF(x,y)\\ &= ۳\overrightarrow{(۲x-y,x+y,x+۳y)}\\ &= \overrightarrow{(۶x-۳y,۳x+۳y,۳x+۹y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(aF) &= \begin{bmatrix}۶ & -۳\\ ۳ & ۳\\ ۳ & ۹\end{bmatrix}\\ &= ۳\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=aM(F)\end{aligned}$$

۳) برای تحقیق ۲) از قضیهٔ ۶.۹.۱، داریم

$$\begin{aligned}(F+G)(x,y) &= F(x,y)+G(x,y)\\ &= \overrightarrow{(۲x-y,x+y,x+۳y)}+\overrightarrow{(۲x,x+y,۲x+۳y)}\\ &= \overrightarrow{(۴x-y,۲x+۲y,۳x+۶y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(F+G) &= \begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۲ & ۲\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\\ &= M(F)+M(G)\end{aligned}$$

۴) برای تحقیق ۳) از قضیهٔ ۶.۹.۱، داریم

$$\begin{aligned}(H\circ F)(x,y) &= H(F(x,y))\\ &= H(۲x-y,x+y,x+۳y)\\ &= \Big((۲x-y)-(x+y)+(x+۳y)\Big)\mathbf{i}\\ &\quad+\Big(۲(۲x-y)+(x+y)-۲(x+۳y)\Big)\mathbf{j}\\ &= \overrightarrow{(۲x+y,۳x-۷y)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(H\circ F) &= \begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & -۷\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\\ &= M(H)M(F)\end{aligned}$$

۵) برای تحقیق قسمت ۴) از قضیهٔ ۶.۹.۱، با فرض $J^{-۱}(x,y)=(u,v)$ داریم

$$\begin{aligned}&J\left(J^{-۱}(x,y)\right)=\overrightarrow{(x,y)}\Rightarrow J(u,v)=\overrightarrow{(x,y)}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{(u-v,۲u+v)}=\overrightarrow{(x,y)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}u-v=x\\ ۲u+v=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳u=x+y\\ ۳v=-۲x+y\end{cases}$$

$$\Rightarrow J^{-۱}(x,y)=\overrightarrow{\left(\frac{x+y}{۳},\frac{-۲x+y}{۳}\right)}$$

$$\begin{aligned}M(J)^{-۱} &= \begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}۱/۳ & ۱/۳\\ -۲/۳ & ۱/۳\end{bmatrix}=M\left(J^{-۱}\right)\end{aligned}$$

**۸.۹.۱ تمرین.** نشان دهید که هر یک از نگاشتهای زیر خطی‌اند. سپس ماتریس نمایش هر یک را مشخص کنید:

۱) $F(x,y,z)=(۲x-۳y+۵z,x+y-۲z)$

۲) $F(x,y)=(۳x-۲y,۲x+۴y,x+y)$

۳) $F(x,y)=۲x-۳y$

۴) $F(x,y)=(x+y,۲x-y)$

۵) $F(x,y,z)=(x+z,y+x,z+x)$

۶) قضیهٔ ۶.۹.۱ را در صورتی تحقیق کنید که $a=۵$ و

$F(x,y)=(۳x-۲y,x+y)$ $\quad H(x,y)=(x+y,x-y)$

$G(x,y)=(۲x-y,x-۲y)$ $\quad J(x,y)=(۲x+y,x+۲y)$

۷) ثابت کنید که $(A^{-۱})^{-۱}=A$ و $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$.

## ۱۰.۱ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به صفحهٔ ۲۵۸ و یا فایل doc.pdf مراجعه شود.

**۱.۱۰.۱ راه اندازی.** دستورات در مورد جبر خطی در میپل، در نرم افزاری بنام `linalg` وجود دارد که با دستور `with(linalg)` می‌توان آن را در حافظه آماده به کار نمود.

**۲.۱۰.۱ تعریف بردار و ماتریس.** برای استفاده از یک بردار و یا یک ماتریس، بهتر است آن را با اسمی بخصوص معرفی کنیم. برای تعریف برداری $n$−مؤلفه‌ای بنام `v` و با درآیه‌های بترتیب `v_1`، `v_2`، . . . و `v_n` از دستور

$$\mathrm{v := vector([v_1, v_2, ..., v_n])} \xmapsto{\text{میپل}} \mathrm{v} := \overrightarrow{(v_1, v_2, \cdots, v_n)}$$

استفاده می‌کنیم. برای تعریف ماتریس $n \times m$ بنام $A$ و با درآیهٔ $(i,j)$ ام $A_{ij}$، از دستور

$$\begin{aligned} &\mathrm{A := matrx(n, m, [[A\_11, A\_12, ..., A\_2m]} \\ &\qquad\mathrm{, [A\_21, A\_22, ..., A\_1m],} \\ &\qquad\mathrm{... , [A\_n1, A\_n2, ..., A\_nm, ]])} \end{aligned}$$

برای تعریف ماتریس

$$A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

استفاده می‌کنیم. توصیه می‌شود که حتی برای تعریف بردارها نیز از دستور ماتریس ستفاده شود. البته دستورات دیگری برای ایجاد سهولت در تعریف وجود دارد که می‌توانید به کمک help میپل به مطالعهٔ آنها بپردازید.

**۳.۱۰.۱ اعمال بر ماتریسها.** فرض کنید $A$ و $B$ ماتریس و $c$ عددی دلخواه باشد، در این صورت

جمع ماتریسهای $A$ و $B$ .................. $\mathrm{A + B} \xmapsto{\text{میپل}}$

$A$ منهی ماتریس $B$ ..................... $\mathrm{A - B} \xmapsto{\text{میپل}}$

$c$ در ماتریس $A$ ......................... $\mathrm{c * A} \xmapsto{\text{میپل}}$

حاصلضرب ماتریسهای $A$ در $B$ $\mathrm{multiply(A, B)} \xmapsto{\text{میپل}}$

ماتریس $A$ به توان $n$ ..................... $\mathrm{A \wedge n} \xmapsto{\text{میپل}}$

معکوس $A$ ......................... $\mathrm{inverse(A)} \xmapsto{\text{میپل}}$

ترانهاد ماتریس $A$ ............... $\mathtt{transpose(A)} \xmapsto{\text{میپل}}$

دترمینان ماتریس $A$ ..................... $\mathrm{det(A)} \xmapsto{\text{میپل}}$

**۴.۱۰.۱ مثال.** قسمت ۲ از تمرین ۱۰.۴.۱ را به صورت زیر به کمک میپل انجام می‌دهیم:

```
with(linalg) :
A := matrix(2, 2, [[1, −2], [2, 3]]);
B := matrix(2, 2, [[0, 2], [3, 1]]);
C := multiply(inverse(A), B);
multiply(C, A);
```

**۵.۱۰.۱ حل دستگاه معادلات خطی.** فرض کنید دستگاه `Sy` از معادلات

`eq_i:a_{i1}*x_1+a_{i2}*x_2+...+a_{im}*x_m=b_i`

تشکیل شده باشد، که $1 \le i \le n$. این دستگاه را به شکل زیر در میپل وارد می‌کنیم:

```
with(linalg) :
eq_1 := a_11 * x_1 + ... + a_1m * x_m = b_1;
⋮
eq_n := a_n1 * x_1 + ... + a_nm * x_m = b_n;
Sy := {eq_1, eq_2, ..., eq_n};
Va := {x_1, x_2, ..., x_m};
```

اکنون برای حل این دستگاه کافی است از دستور `solve(Sy,Va)` استفاده شود.

**۶.۱۰.۱ مقدار و بردار ویژه.** برای بدست آوردن چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $A$ کافی است از دستور `charpoly(A)` استفاده شود. به کمک دستور `eigenvectors(A)` می‌توان مقادیر و بردارهای ویژهٔ $A$ را بدست آورد. نتیجه به شکل زنجیره‌ای از عبارتهای به فرم `[a,b,(v_1,...,v_k)]` خواهد بود، که `a` مقدار ویژه، $b$ شمارهٔ تکرار آن در چندجمله‌ای مشخصه و `(v_1,...,v_k)` مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای ویژهٔ نظیر به `a` می‌باشد.

**۷.۱۰.۱ یادداشت.** در آدرس اینترنتی `http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r2.htm` مثالها و منابع مربوط به مباحث فوق الذکر آورد شده است.